

HAUPTAUFSÄTZE

Über die Stabilität dreischichtiger Stäbe und Platten, deren mittlere aus einem Leichtstoff bestehende Schicht einen in Dickenrichtung veränderlichen Elastizitätsmodul hat. I.

Von F. Reutter in Karlsruhe.

Bei Verbundstäben bzw. -platten mit zwei dünnen Sperrholzplatten oder Blechen als Deckschichten und einer aus einem Leichtstoff bestehenden Füllschicht können zwei verschiedene Instabilitäten auftreten: das langwellige Eulerknicken des Gesamtstabes und ein kurzwelliges Knittern, wobei jedes der beiden Bleche unabhängig vom andern beult. Diese Instabilitäten werden im folgenden untersucht unter der besonderen Annahme, daß die Füllschicht einen in Dickenrichtung veränderlichen E-Modul besitzt.

The author discusses the properties of bars respectively plates composed of two thin plywood or metal sheets and a filling layer between them consisting of a material of small weight. With these bars, two different instabilities may occur; the Euler breaking of the whole bar with a long wave-length and a crumpling with short wave-lengths. In the latter case, one sheet crumples independently from the other. The instabilities are investigated on the presumption that the modul of elasticity of the filling layer is variable transverse to the bar.

Les barres ou les plaques composées, constituées par les plaques de bois ou de metal avec matière légère de remplissage, peuvent donner lieu à deux genres differents d'instabilité: la flexion transversale d'Euler à grande longueur d'onde de la barre entière et le froissement local de plaques superficielles indépendamment l'une de l'autre. Ces instabilités sont analysés par la suite, en admettant une variation du modul d'élasticité de la matière d' remplissage dans le sens de l'épaisseur.

В составных стержнях или пластинах с двумя тонкими покровными слоями из фанеры или металла и сердцевинной из легкого материала могут наблюдаться два рода неустойчивого равновесия: поперечный прогиб по Эйлеру всего стержня или местное сминание, при котором каждый из покровных слоев выпучивается независимо один от другого. Ниже рассматриваются эти явления неустойчивого равновесия, принимая, что заполняющий слой имеет в направлении толщины переменный модуль упругости.

Vor einiger Zeit ist der Vorschlag gemacht worden¹⁾, auf achsialen Druck beanspruchte Stäbe und quer- und längsgedrückte Platten im Leichtmetall- und Holzbau aus zwei verschiedenen Stoffen zu konstruieren. Zwei dünne Bleche oder Sperrholzplatten als Deckschichten sollten durch eine aus einem Schaumstoff bestehende leichte Füllschicht als Schubverband verbunden werden. Dieser Gedanke wird durch einen bekannten Sachverhalt aus der Festigkeitslehre nahegelegt: Die Festigkeit eines Stabes kann ohne Änderung der Querschnittsfläche durch geeignete Dimensionierung erhöht werden, indem man die Massen in möglichst großer Entfernung von den Hauptträgheitsachsen anordnet. Dies führte schon seit langem auf die bekannten Hohl- und Kastenquerschnitte. Allerdings ist der Verringerung der Wandstärke und Vergrößerung der lichten Weiten bei solchen Konstruktionen eine Grenze gesetzt, unterhalb der der Querschnitt dadurch instabil wird, daß an Stelle eines seitlichen Ausknickens des Stabes als Ganzes eine Wellung der Wände (Knittern) eintritt.

Wie die Hohlquerschnitte, so können auch Verbundstäbe zwei verschiedene Arten von Instabilitäten zeigen: Einmal kann der Stab als ganzes k n i c k e n (langwelliges Eulerknicken), zum anderen kann ein kurzwelliges K n i t t e r n eintreten, wobei jede der beiden Deckschichten unabhängig von der anderen beult. Welche von den beiden Knickmöglichkeiten sich einstellt, hängt von dem Verhältnis der Last zu den verschiedenen Bemessungsgrößen des Verbundstabes ab.

In der vorliegenden Arbeit, die im Anschluß an eine Zusammenarbeit mit Herrn W. F l ü g g e entstand, wird nun in Weiterentwicklung des obigen Gedankens das Verhalten von Verbundstäben und -platten untersucht, bei denen die Füllschicht nicht mehr homogen ist, sondern an den Rändern eine größere Dichte besitzt. Dann ist auch der Elastizitätsmodul der Füllschicht über die Dicke der Füllschicht hin in entsprechender Weise wie die Dichte veränderlich. Daher benötigt man für diese Untersuchungen die Elastizitätstheorie eines Mediums mit in Dickenrichtung veränderlichem E-Modul.

¹⁾ W. Flügge und K. Marguerre, Die optimale Knicklast eines Stabes, der aus zwei durch einen leichten Füllstoff verbundenen Blechen besteht. Luftf.-Forsch., Untersuchungen u. Mitteilungen (U. M.) 1360/1; K. Marguerre, Die optimale Beullast einer längsgedrückten gelenkig gelagerten Platte, die aus zwei durch einen leichten Füllstoff verbundenen Blechen besteht. Desgl. U. M. 1360/2.

In Nr. 1 werden für eine elastische Halbebene und einen elastischen Parallelstreifen, dessen E -Modul in der Dickenrichtung vom Rande ausgehend stark abnimmt, die Randverschiebungen unter der Annahme sinusförmiger Normalbelastung des Randes angegeben. Diese Normalbelastung wird durch den Druck der sinusförmig knitternden Bleche auf ihre elastische Bettung hervorgerufen. Die Füllschicht hat man sich als einen elastischen Parallelstreifen vorzustellen, dessen E -Modul beiderseits der Mittellinie von einem sehr kleinen Werte nach dem Rande zu stark ansteigt. Bei genügend kurzwelligem Knittern beulen die beiden Deckschichten unabhängig voneinander so, daß jede von ihnen als auf einer elastischen Füllschicht von unendlicher Dicke (elastische Halbebene) gebettet angesehen werden kann. In Nr. 2 wird die „Bettungsziffer“ bestimmt. Je kürzer die Wellenlänge, desto weniger unterscheiden sich die Werte der Bettungsziffer für Halbebene und Parallelstreifen. Die Füllschicht wird jetzt vorwiegend am Rande mechanisch beansprucht und die Deformationen dringen nur schwach in die Tiefe ein. In Nr. 3 und 4 wird der auf Halbebene und Parallelstreifen elastisch gebettete achsial gedrückte Stab behandelt und seine kritische Stauchung bzw. Knitterlast ermittelt. In Nr. 5 wird ein allgemeiner Weg zur Behandlung des Eulerknickens des Gesamtstabes angegeben. Die Differentialgleichung für die Verschiebungen erhält ein von der Knicklast abhängiges Störungsglied. Die Gleichgewichtsform des ausgeknickten Stabes läßt sich durch Iteration ermitteln, die Knicklast P selbst durch Nullsetzen einer Achterdeterminante. Dieser sehr umständliche Weg kann vereinfacht werden, wenn man P näherungsweise statt in die Gleichgewichts- in die Randbedingungen einführt. Weit einfacher ist freilich die Berechnung der Knicklast nach der Energiemethode, die im zweiten Teil dieser Abhandlung gegeben werden soll.

1. Randverschiebungen für die elastische Halbebene und den Parallelstreifen unter sinusförmiger Normalbelastung bei exponentiell abnehmendem E -Modul.

Wir behandeln zunächst kurz die Halbebene und den Parallelstreifen, deren E -Modul senkrecht zur Randlinie bzw. der beiderseitigen Berandung stark abnimmt. Die Randlinien seien sinusförmiger Normalbelastung ausgesetzt. Es sei die Halbebene $x > 0$ (Bild 1) gegeben, und wir machen für den E -Modul $E(x)$ den Ansatz

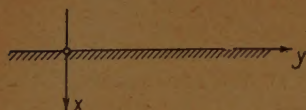


Bild 1.

$$E(x) = E_r e^{-kx}, \quad E_r = E(0) \quad \dots \quad (1).$$

Die Normalspannung am Rande $x = 0$ sei sinusförmig verteilt, und die Verschiebungskomponente parallel zur Randlinie soll verschwinden. Es seien u, v die Komponenten der Verschiebung

in der x - bzw. y -Richtung. Dann läßt sich mit $m = \frac{\pi}{l^*}$, $2l^*$ Wellenlänge der sinusförmigen Normalbelastung, setzen:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= p(x) \cdot \sin my + q(x) \cos my \\ v(x, y) &= s(x) \cdot \sin my + t(x) \cos my \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2).$$

Man erhält $p(x), q(x), s(x), t(x)$ als Integrale linearer homogener Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten²⁾. Unter den obigen Randbedingungen wird bei verschwindender Querkontraktionszahl $\nu = \frac{1}{m}$ (m Poisson'sche Zahl):

$$p(x) = (a_0 + a_1 x) e^{\varrho_1 x} \quad \dots \quad (3),$$

$$t(x) = \left[\frac{m}{\varrho_1} a_0 + \left(\frac{2}{m} + \frac{m}{\varrho_1^2} \right) a_1 + \frac{m}{\varrho_1} a_1 x \right] e^{\varrho_1 x} \quad \dots \quad (4),$$

$$q(x) \equiv 0, \quad s(x) \equiv 0$$

mit

$$\varrho_1 = \frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} + m^2} \quad \dots \quad (4a)$$

und

$$a_0 = \frac{2\varrho_1^2 + m^2}{2\varrho_1^3} \cdot \frac{P_0}{E_r}, \quad a_1 = \frac{-m^2}{2\varrho_1^2} \cdot \frac{P_0}{E_r} \quad \dots \quad (4b).$$

²⁾ F. Reutter, Die periodisch belastete Halbebene und der Parallelstreifen mit in Dickenrichtung veränderlichem Elastizitätsmodul. Erscheint im Ing.-Arch.

Insbesondere ergibt sich dann für die maximale Randverschiebung

$$p(0) = \frac{\frac{k}{2} - 3\sqrt{\frac{k^2}{4} + m^2}}{\frac{k^2}{2} + m^2 - k\sqrt{\frac{k^2}{4} + m^2}} \cdot \frac{P_0}{2E_r}, \quad t(0) = 0 \quad (5).$$

Anschließend behandeln wir einen Parallelstreifen von der Breite $2b$ (Bild 2). Der E -Modul gehorche dem Gesetz

$$E(x) = E_m e^{k|x|} \quad (6)$$

(E_m : E -Modul in der Mittellinie $x=0$); es findet also ein Sprung von $\frac{dE}{dx}$ in der Mittellinie statt.

Beide Ränder seien sinusförmiger Normalbelastung unterworfen. Wir unterscheiden den asymme-

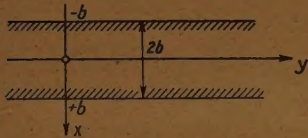


Bild 2.

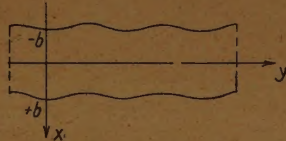


Bild 3a (asymm.).

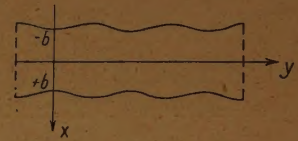


Bild 3b (symm.).

trischen und den symmetrischen Belastungs- und Verschiebungsfall (Bild 3a bzw. 3b). Die Randpunkte sollen keine Horizontalverschiebung erleiden. Dann lauten die Randbedingungen:

$$\sigma_x(+b, y) = P_0 \sin my, \quad \sigma_x(-b, y) = \mp P_0 \sin my, \quad (7a), \quad (7b)$$

$$v(+b, y) = 0, \quad v(-b, y) = 0. \quad (8a), \quad (8b).$$

Das obere Vorzeichen in Gl. (7b) gilt für den symmetrischen, das untere für den asymmetrischen Fall.

Unter diesen Annahmen kann man setzen³⁾

$$u(x, y) = p(x) \cdot \sin my, \quad v(x, y) = t(x) \cdot \cos my \quad (9)$$

$p(x)$ und $t(x)$ genügen linearen Dgln. mit konstanten Koeffizienten und zwar für

$$\begin{aligned} \text{a) } x > 0: & \quad p'''' + 2kp''' + (k^2 - 2m^2)p'' - 2m^2kp' + m^4p = 0 \\ \text{b) } x < 0: & \quad p'''' - 2kp''' + (k^2 - 2m^2)p'' + 2m^2kp' + m^4p = 0 \end{aligned} \quad (10).$$

Ihre Integrale sind mit

$$\varrho_1 = \frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} + m^2}, \quad \varrho_2 = -\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} + m^2} \quad (11),$$

$$\begin{aligned} \text{a) } p_a(x) &= (a_0 + a_1 x) e^{-\varrho_1 x} + (a_2 + a_3 x) e^{\varrho_2 x} \\ \text{b) } p_A(x) &= (A_0 + A_1 x) e^{-\varrho_2 x} + (A_2 + A_3 x) e^{\varrho_1 x} \end{aligned} \quad (12),$$

$$\begin{aligned} \text{a) } t_a(x) &= \left[\left(\frac{2}{m} + \frac{m}{\varrho_1^2} \right) a_1 - \frac{m}{\varrho_1} a_0 - \frac{m}{\varrho_1} a_1 x \right] e^{-\varrho_1 x} + \\ &+ \left[\left(\frac{2}{m} + \frac{m}{\varrho_2^2} \right) a_3 + \frac{m}{\varrho_2} a_2 + \frac{m}{\varrho_2} a_3 x \right] e^{\varrho_2 x}, \\ \text{b) } t_A(x) &= \left[\left(\frac{2}{m} + \frac{m}{\varrho_2^2} \right) A_1 - \frac{m}{\varrho_2} A_0 - \frac{m}{\varrho_2} A_1 x \right] e^{-\varrho_2 x} + \\ &+ \left[\left(\frac{2}{m} + \frac{m}{\varrho_1^2} \right) A_3 + \frac{m}{\varrho_1} A_2 + \frac{m}{\varrho_1} A_3 x \right] e^{\varrho_1 x}. \end{aligned} \quad (13)$$

Zur Festlegung der insgesamt 8 Integrationskonstanten dienen die 4 Gln. (7), (8) in der Form:

$$p'_a(b) = \frac{P_0}{E_r}, \quad p'_A(-b) = \mp \frac{P_0}{E_r} \quad (7^*)$$

$$t_a(b) = 0, \quad t_A(b) = 0 \quad (8^*).$$

Hierzu kommen in der Streifenmitte die Bedingungen

$$\begin{aligned} p_a(0) &= p_A(0), & p'_a(0) &= p'_A(0), \\ p''_a(0) &= p''_A(0), & p'''_a(0) &= p'''_A(0). \end{aligned} \quad (14)$$

³⁾ F. Reutter, l. c.

Setzt man

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \alpha + \beta a_2 + \gamma a_3, & A_2 &= \pm \alpha + \beta A_0 - \gamma A_1, \\ a_1 &= \delta + \varepsilon a_2 + \eta a_3, & A_3 &= \mp \delta - \varepsilon A_0 + \eta A_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= e_{e_1 b} \left(\frac{m^2 b}{2 \varrho_1^2} - \frac{m^2}{2 \varrho_1^3} - \frac{1}{\varrho_1} \right), \\ \beta &= e_{(e_1 + e_2) b} \left(\frac{m^2}{\varrho_1^2} + \frac{m^4}{2 \varrho_1^4} - \frac{m^4 b}{2 \varrho_1^3} - \frac{1}{2} + \frac{\varrho_1 b}{2} \right), \\ \gamma &= e_{(e_1 + e_2) b} \left(\frac{m^2 b}{2 \varrho_1^2} + \frac{m^4 b}{2 \varrho_1^4} + \frac{m^2}{2 \varrho_1^3} - \frac{m^4 b^2}{2 \varrho_1^3} - \frac{\varrho_1}{2 m^2} + \frac{b}{2} + \frac{\varrho_1^2 b}{2} + \frac{\varrho_1 b^2}{2} \right), \\ \delta &= -e_{e_1 b} \frac{m^2}{2 \varrho_1^3}, & \varepsilon &= e_{(e_1 + e_2) b} \left(\frac{m^4}{2 \varrho_1^3} - \frac{\varrho_1}{2} \right), \\ \eta &= e_{(e_1 + e_2) b} \left(\frac{m^2}{2 \varrho_1^2} + \frac{m^4 b}{2 \varrho_1^3} - \frac{\varrho_1^2}{2 m^2} - \frac{b \varrho_1}{2} - 1 \right), \end{aligned} \right\} \dots \dots (16)$$

wo das obere Vorzeichen für den symmetrischen, das untere für den asymmetrischen Fall gilt, so ergeben sich für den asymmetrischen Fall die Gleichungen

$$a_2 = A_0, \quad a_3 = -A_1, \quad a_0 = A_2, \quad a_1 = -A_3 \dots \dots \dots (17).$$

a_2, a_3 genügen dem System

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon - \varrho_1 \beta + \varrho_2) a_2 + (\eta - \varrho_1 \gamma + 1) a_3 &= \varrho_1 \alpha - \delta \\ (3 \varrho_1^2 \varepsilon - \varrho_1^3 \beta + \varrho_2^3) a_2 + (3 \varrho_1^2 \eta + 3 \varrho_2^2 - \varrho_1^3 \gamma) a_3 &= \varrho_1^3 \alpha - 3 \varrho_1^2 \delta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18).$$

Für den symmetrischen Fall erhält man dagegen

$$a_2 = -A_0, \quad a_3 = A_1, \quad a_0 = -A_2, \quad a_1 = A_3 \dots \dots \dots (19)$$

und $a_0 = -a_2$.

So lassen sich a_0, a_1, a_3 aus den drei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{\alpha + \gamma a_3}{1 + \beta} \\ a_1 &= \delta - \varepsilon a_0 + \eta a_3 \\ (\varrho_1^2 - \varrho_2^2) a_0 - 2 \varrho_1 a_1 + 2 \varrho_2 a_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

bestimmen.

Dann sind im symmetrischen wie im asymmetrischen Fall $p(x)$ und $t(x)$ und somit auch $u(x, y)$, $v(x, y)$ und hieraus die Spannungen $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ bestimmbar.

2. Die Bettungsziffer für Halbebene und Parallelstreifen.

Die sinusförmige Normalbelastung

$$P(y) = P_0 \sin my$$

bedingt beim elastischen Halbraum die Randverschiebung

$$u(0, y) = p(0) \sin my \dots \dots \dots (21),$$

bei der elastischen Halbebene dagegen

$$u(b, y) = p(b) \sin my \dots \dots \dots (22).$$

Normalbelastung und Randverschiebung koppeln wir gemäß dem bekannten von Zimmermann formulierten Ansatz⁴⁾ durch die Relation

$$P(y) = -\kappa \cdot u(0, y) \dots \dots \dots (23)$$

bzw.

$$P(y) = -\kappa \cdot u(b, y) \dots \dots \dots (24).$$

κ heißt die „Bettungsziffer“. Dieser Ansatz erweist sich als brauchbar für die kurzwelligen Vorgänge (Knittern), während sich außerhalb dieses Bereiches auch hier seine in der Literatur mehrfach diskutierte Problematik zeigt⁵⁾.

Nach Gl. (4b) wird jetzt

$$\kappa = -\frac{P(y)}{u(0, y)} = -\frac{2 \varrho_1^3 E_r}{m^2 + 2 \varrho_1^2} \dots \dots \dots (25).$$

⁴⁾ Zimmermann, Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues. Berlin 1888; u. Hayaschi, Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage. Berlin 1921.

⁵⁾ K. Wieghardt, Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage. Z. angew. Math. Mech. Bd. 2 (1922), S. 165—184; K. Marguerre, Über den Träger auf elast. Unterlage. Z. angew. Math. Mech. Bd. 17 (1937), S. 224—231.

Die Bettungsziffer ist ein Maß für die Ausbiegung eines auf der Füllschicht elastisch gebetteten Bleches; sie wird im folgenden zur Berechnung der Knitterlast benötigt. Diese hängt auch von der Blechdicke t ab. Wir führen aus Zweckmäßigkeitsgründen, um dimensionslose Größen zu erhalten, t schon jetzt in die Rechnungen ein und benützen statt der Wellenlänge $2l^*$ die Größe

$$\beta = \frac{\pi t}{l^*}.$$

Ferner setzen wir

$$\frac{kt}{\sqrt[3]{\mu}} = k^*, \quad \frac{\varrho t}{\sqrt[3]{\mu}} = \varrho^*, \quad \frac{\beta}{\sqrt[3]{\mu}} = m^*, \quad \frac{\kappa \cdot t}{\sqrt[3]{\mu} \cdot E_r} = f_1(\beta^2).$$

Dabei ist $\mu = \frac{E_r}{E_1}$, $E_r = E$ -Modul der Füllschicht am Rande, $E_1 = E$ -Modul der Deckschicht.

Die Größen k^* , ϱ^* , m^* , $f_1(\beta^2)$ sind dimensionslos.

So wird

$$f_1(\beta^2) = - \frac{2 \varrho^{*3}}{m^{*2} + 2 \varrho^{*2}} \dots \dots \dots (26).$$

$f_1(\beta^2)$ ist ein von der Blechdicke t und dem Modulverhältnis μ u n a b h ä n g i g e s Maß für die Bettungsziffer. Die Abhängigkeit der Bettungsziffer κ bzw. $f_1(\beta^2)$ von β , l^* und k^* ist aus Tafel 1 ersichtlich. Das Ziel der Untersuchungen dieser Nr. ist ein Vergleich der Bettungsziffer für die

Tafel 1: $f_1(\beta^2)$ (Halbebene).

$\frac{\beta^2}{\mu^{2/3}}$ k^*	0,003689	0,01	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
0	0,0404	0,0496	0,2222	0,2981	0,4714	0,6667	0,8164	0,9428	1,1547	1,3333
0,1	0,00884	0,0268	0,1632	0,2462	0,4185	0,6126	0,7641	0,8884	1,1001	1,2785
0,3	—	0,00463	0,08889	0,1626	0,3231	0,5204	0,6630	0,7863	0,9973	—
0,5	0,000202	0,00133	0,04887	0,1070	0,2501	0,4504	0,5720	0,6933	0,9000	1,1007
0,6307	—	0,00072	0,03363	0,0811	0,2092	0,3799	0,5161	0,6365	0,8411	1,0148
1,0	0,000027	0,00019	0,01317	0,0386	0,1282	0,2676	0,3921	0,5000	0,6916	0,8579
2,0	—	0,00005	0,00222	0,00797	0,0373	0,1051	0,1804	0,2555	0,4000	0,5353
3,0	—	0,00001	0,00069	0,00266	0,0141	0,0469	0,0885	0,1346	0,2330	0,3333
5,0	—	0,0000017	0,00016	0,00061	0,00385	0,0133	0,0277	0,0453	0,0885	0,1386

Halbebene mit der für den Parallelstreifen. Dazu müssen wir eine zu $f_1(\beta^2)$ analoge Funktion für den Parallelstreifen ermitteln. Nach Gl. (22) und (24) wird

$$f_2(\beta^2) = \frac{\kappa t}{E_r \mu^{1/3}} = \frac{t}{p(b) \cdot \mu^{1/3}} \dots \dots \dots (27),$$

wo $p(b)$ gemäß den Gln. (11), (18), (20) einzusetzen ist. Die Bettungsziffer ist jetzt von dem Verhältnis

$$\frac{kb}{t} \mu^{1/3} = b k^*$$

abhängig.

Gemäß den Gln. (11), (15), (16) ist $p(b)$ proportional zu b ; κ und $f_2(\beta^2)$ sind dagegen umgekehrt proportional zu b .

Die Tafeln 2 und 3 enthalten die Werte von $f_2^*(\beta^2) = \frac{b}{2} f_2(\beta^2)$ für den symmetrischen bzw. asymmetrischen Fall in Abhängigkeit von $b k^*$ und $b^2 \beta^2$, während Tafel 1 den Grenzfall $b \rightarrow \infty$ wiedergibt.

Tafel 2: $f_2^*(\beta^2)$ (Parallelstreifen, symmetrischer Fall).

$\frac{b^2 \beta^2}{\mu^{2/3}}$ $b k^*$	0,014656	0,04	0,4	0,8	2,0	4,0	6,0	8,0	12,0
0	0,60861	0,60876	0,61352	0,62551	0,67782	0,78030	0,88815	0,98989	1,17753
0,2	0,60362	0,59084	0,59649	0,60422	0,64698	0,74255	0,84249	0,94061	1,12176
1,0	0,52687	0,52570	0,51366	0,50423	0,52120	0,58920	0,67017	0,76620	0,93174
2,0	0,39398	0,39276	0,38210	0,37541	0,34342	0,42566	0,49230	0,56884	0,74669
4,0	—	—	0,17236	0,16998	0,17299	0,20341	0,25047	0,30663	0,42781
6,0	—	—	0,064479	0,06352	0,06835	0,08919	0,12079	0,15987	0,24805
10,0	—	0,00625	0,005982	0,00651	0,00792	0,01792	0,03134	0,04859	0,09027

Tafel 3: $f(\beta^2)$ (Parallelstreifen, asymmetrischer Fall).

0	0,003033	0,008601	0,07861	0,15084	0,34056	0,57055	0,75174	0,89768	1,13227
0,2	0,000162	0,002999	0,04665	0,10962	0,28569	0,51688	0,69708	0,84247	1,07205
1,0	0,000028	0,000192	0,01842	0,04517	0,14683	0,34143	0,54363	0,65654	0,87678
2,0	0,000011	0,000073	0,00605	0,02079	0,08930	0,22372	0,35294	0,46829	0,68755
4,0	—	—	0,00170	0,00635	0,03206	0,09604	0,16943	0,24560	0,39246
6,0	—	—	0,00079	0,00246	0,01366	0,04511	0,08582	0,13208	0,23056
10,0	—	0,000038	0,00034	0,00058	0,00253	0,01321	0,02735	0,04522	0,08930

Die Diskussion der numerischen Ergebnisse (man setze am besten in den Tafeln 2 und 3 $b=2\text{ cm}$) zeigt: Je größer β^2 , um so geringer werden die Unterschiede zwischen den Zahlenwerten der Tafeln 1, 2 und 3. Für große β^2 , d. h. kleine Wellenlängen kann also die Halbebene an Stelle des Parallelstreifens gesetzt werden, ohne daß ein nennenswerter Fehler begangen wird. Sehr stark unterscheiden sich auch für kleine β^2 die Bettungsziffern im symmetrischen und asymmetrischen Fall beim Parallelstreifen; die asymmetrischen Werte liegen viel tiefer. Wir kommen darauf noch bei der numerischen Behandlung des Eulerknickens im 2. Teil dieser Arbeit zurück.

3. Die Knitterlast für ein auf der elastischen Halbebene gebettetes Blech.

Wir betrachten jetzt ein einzelnes Blech, das mit dem Rande der Füllschicht verbunden und daher auf dieser elastisch gebettet ist (Bild 4). Die Dgl. für die Durchbringung $\bar{u} = \bar{u}(y)$ des elastisch gebetteten Stabes, der an beiden Enden $y = 0$ und $y = l$ dem achsialen Druck P unterworfen ist, lautet:

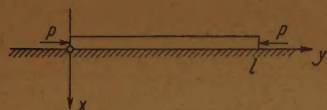


Bild 4.

$$E_1 J_1 \bar{u}'''' + P \bar{u}'' + \kappa \bar{u} = 0 \quad (28)$$

Dabei bedeutet κ wieder die „Bettungsziffer“.

Mit dem Ausdruck (25) für κ und $J_1 = \frac{t^3}{12}$ lautet jetzt die Dgl. (28):

$$\bar{u}'''' + \frac{12P}{E_1 t^3} \bar{u}'' - \frac{24 \varrho_1^3 E_r}{E_1 (m^2 + 2 \varrho_1^2) t^3} \bar{u} = 0 \quad (29).$$

Wir fordern die Randbedingungen der gelenkigen Lagerung und behandeln die Dgl. (29), indem wir \bar{u} nach den Eigenfunktionen des achsial gedrückten, gelenkig gelagerten (nicht elastisch gebetteten) Stabes von der Länge l entwickeln:

$$\bar{u}(y) = \sum_{N=1}^{\infty} \delta_N \sin m_N y \quad (30).$$

Mit

$$m_N = \frac{N\pi}{l} = \frac{\pi}{l^*} \quad \text{und} \quad B = -\frac{24 \varrho_1^3 E_r}{E_1 (m^2 + 2 \varrho_1^2) t^3} \quad (30a)$$

erhält man dann für P :

$$P = \frac{E_1 t^3}{12 \pi^2 l^{*2}} (\pi^4 + B l^{*4}) \quad (31).$$

Für diesen Wert von P ist eine von $\bar{u} = 0$ verschiedene Gleichgewichtsform des Bleches möglich. Diese „Knitterlast“ P hängt also nur vom Verhältnis $l^* = \frac{l}{N} = \frac{\text{Stablänge}}{\text{Wellenzahl}} = \text{Wellenlänge}$, nicht von der Stablänge absolut ab. Will man auf die Stablänge beziehen, so muß man eine diskrete Kurven $schar$, d. h. für jede Wellenzahl N eine andere Kurve für die Knitterlast angeben.

Für $k = 0$ wird $\varrho_1 = -m$ und

$$\lim_{k \rightarrow 0} P = \frac{E_1 t^3 \pi^2}{12 l^{*2}} + \frac{2 E_r l^*}{3 \pi} \quad (32);$$

hieraus folgt als Grenzwert der kritischen Stauchung $\bar{\varepsilon} = P/E_1 t$:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \bar{\varepsilon} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{P}{E_1 t} = \frac{t^2 \pi^2}{12 l^{*2}} + \frac{2 E_r l^*}{3 E_1 \pi t} \quad (33).$$

P ist die Knitterlast für ein Blech; die Knitterlast für den Stab, d. h. beide Bleche wird nach Einsetzen des Wertes von B (Gl. 30a):

$$P_2 = 2P = \frac{E_1 t^3 \pi^2}{6 l^{*2}} - 4 \frac{\varrho_1^3 l^{*2} E_r}{\pi^2 \left(2 \varrho_1^2 + \frac{\pi^2}{l^{*2}} \right)} \quad (31*).$$

^{*)} Siehe z. B. Biezeno-Grammel, Techn. Dynamik S. 521.

Als Maß für die Knitterwellenlänge benutzen wir wieder die in Nr. 2 eingeführte Größe $\beta = \frac{\pi t}{l^*}$; dann kann die kritische Stauchung $\bar{\varepsilon}$ für ein Blech in der Form

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\beta^2}{12} - \frac{2 t \mu \varrho_1^3}{2 \varrho_1^2 \beta^2 + \frac{\beta^4}{t^2}} \dots \dots \dots (34)$$

geschrieben werden oder mit Hilfe des Ausdrucks (25) für die Bettungsziffer auch

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\beta^2}{12} + \frac{\kappa t}{E_1 \beta^2} \dots \dots \dots (34a).$$

Man zeigt leicht, daß $\bar{\varepsilon}$ proportional zu $\mu^{2/3}$ ist.

Die sehr kleine Wellenlänge l^* wird sich so einstellen, daß $\bar{\varepsilon}$ ein Minimum wird. Wir schreiben $\bar{\varepsilon}$ mittels

$$\beta^2 = t^2 (\varrho_1^2 - k \varrho_1)$$

als Funktion von ϱ_1 und setzen zur Bestimmung des Minimums $\frac{d\bar{\varepsilon}}{d\varrho_1} = 0$.

Es wird

$$\bar{\varepsilon} = \frac{t^2}{12} \varrho_1^2 - \frac{k t^2}{12} \varrho_1 - \frac{2 t \mu \varrho_1}{3 t^2 \varrho_1^2 - 4 k t^2 \varrho_1 + k^2 t^2} \dots \dots \dots (35)$$

und hat einen Extremwert, wenn ϱ_1 eine Wurzel der Gl. 5. Grades:

$$\varrho_1^5 - \frac{19}{6} k \varrho_1^4 + \frac{34}{9} k^2 \varrho_1^3 + \left(\frac{4\mu}{t^3} - \frac{19}{9} k^3 \right) \varrho_1^2 + \frac{5}{9} k^4 \varrho_1 - \left(\frac{k^5}{18} + \frac{4\mu}{3 t^3} k^2 \right) = 0 \dots \dots (36).$$

Für $k = 0$ wird $\varrho_1^3 + \frac{4\mu}{t^3} = 0$, also $\lim_{k \rightarrow 0} \varrho_1 = \sqrt[3]{-4\mu}$.

Für $k \neq 0$ behandeln wir die Gleichung am einfachsten mittels der Substitution $\varrho_1 = z k$. Dann ergeben sich die Nullstellen als Schnittpunkte einer festen Kurve 5. Grades mit einer Schar von Parabeln 2. Grades mit gemeinsamer Achse und festen Nullstellen (Bild 5):

$$z^5 - \frac{19}{6} z^4 + \frac{34}{9} z^3 - \frac{19}{9} z^2 + \frac{5}{9} z - \frac{1}{18} = \frac{4\mu}{3 (tk)^3} (1 - 3z^2) \quad (36a).$$

Es zeigt sich, daß unabhängig vom k -Wert eine positive einfache Nullstelle ϱ_1 in der Umgebung von $\frac{k}{\sqrt{3}}$ liegt.

Weitere reelle Nullstellen sind nur für $k \leq \frac{\sqrt[3]{0,25081 \mu}}{t}$ vorhanden und zwar sind diese negativ.

Für $k_g = \frac{\sqrt[3]{0,25081 \mu}}{t}$ liegt eine doppelte Nullstelle mit $z = -0,9624$ vor, d. h. die gestrichelte Parabel berührt eben die Kurve 5. Ordnung. Für $k < k_g$ sind je zwei einfache negative Nullstellen, für $k > k_g$ keine reellen negativen Nullstellen vorhanden $\left(k^* = \frac{kt}{\mu^{1/3}} \right)$.

Nun ist nach Gl. (4a) ϱ_1 eine negative Zahl. Zudem bedingt, gleichgültig ob $\sqrt{\frac{k^2}{4} + \frac{\beta^2}{t^2}}$ positiv oder negativ, $\varrho_1 = \frac{k}{\sqrt{3}}$ einen imaginären Wert von β . Es ergibt sich also: Nimmt der E -Modul der Füllschicht (unendliche Halbebene) nach dem Ansatz $E(x) = E_r e^{-kx}$ ab, so gibt es ein Minimum der kritischen Knitterstauchung (mit reeller Wellenlänge) nur für $k \leq \frac{\sqrt[3]{0,25081 \mu}}{t}$.

Jedoch ist die Berechnung der Knitterlast unter Zugrundelegung der unendlichen Halbebene für k^* -Werte, die wesentlich von Null verschieden sind, nicht ohne weiteres zulässig. Wir ermitteln die Wellenlänge, die zum Minimum der Knitterlast gehört, für $k = 0$ und für k_g für die Annahmen $t = 0,067$ cm, $\mu = 1,668 \cdot 10^{-4}$ und $b = 2$ cm und erhalten

$$l_o^* \sim 24 t, \quad l_g^* \sim 44 t < 2 b,$$

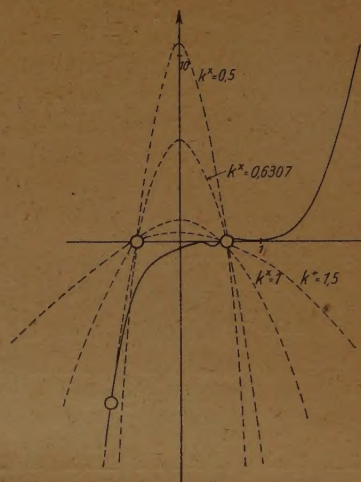


Bild 5.

aber doch in der Größenordnung 2b. Die Länge der Wellen des knitternden Bleches wird also im letzteren Falle schon mit der Dicke der Füllstoffschicht vergleichbar. Infolgedessen könnten auch die tiefer in der Füllschicht liegenden Teilchen bei der Stabilisierung des Bleches eine Rolle spielen. Daher muß zur Behandlung des Knittervorganges zunächst auch die Rechnung für den Parallelstreifen mit ausgeführt werden. Allerdings zeigt die Durchführung, daß die tatsächlichen Abweichungen zwischen Parallelstreifen und Halbebene im Gebiet kleiner Wellenlängen nicht sehr bedeutend sind.

4. Die Knitterlast für ein auf dem Parallelstreifen elastisch gebettetes Blech.

Die geschlossene Angabe der kritischen Stauchung $\bar{\varepsilon}$ für den Parallelstreifen, dessen E -Modul beiderseits der Mittellinie exponentiell ansteigt, würde auf einen sehr verwickelten Ausdruck führen. Wir berechnen daher $\bar{\varepsilon}$ nach Gl. (34a) mit Hilfe der in Nr. 2 schon angegebenen numerischen Werte der Bettungsziffer und können dazu die Knitterlast auf Grund der Beziehung

$$P = \frac{E_1 t^3 \pi^2}{12 l^{*2}} + \kappa \frac{l^{*2}}{\pi^2}$$

bestimmen. Nach Gl. (34a) ist $\bar{\varepsilon}$ wiederum proportional zu $\mu^{2/3}$. Die Abhängigkeit der kritischen Stauchung $\frac{\bar{\varepsilon}}{\mu^{2/3}}$ von β^2 und k^* bei einem Stab von der Dicke $2b = 4$ cm für den symmetrischen Fall ①, den asymmetrischen Fall ② und die Vergleichswerte für den Parallelstreifen ③ zeigt Tafel 4. Für andere b -Werte lassen sich die Tafeln leicht aus den Tafeln 2 und 3 berechnen; eine dimensionslose Tafel wie für die Bettungsziffern läßt sich indessen hier nicht angeben. Doch ist mit der Kenntnis der $\bar{\varepsilon}$ -Werte für ein endliches b und den Grenzfall $b \rightarrow \infty$ (Halbebene) das qualitative Verhalten von $\bar{\varepsilon}$ für verschiedene b -Werte ausreichend gekennzeichnet. Wie in Nr. 2 für die Bettungsziffer zeigt sich auch hier: Je größer β^2 , um so geringer werden die Unterschiede der kritischen Stauchung für Halbebene und Parallelstreifen. Die Resultate der Halbebene stimmen bis auf eine geringe Senkung der Knitterlast weitgehend mit denen für den Parallelstreifen (asymmetrischer Fall) überein (Tafel 4, Zeile ③).

Tafel 4: $\frac{\bar{\varepsilon}}{\mu^{2/3}}$ für $\begin{cases} \text{① Parallelstreifen symmetrisch.} \\ \text{② Parallelstreifen asymmetrisch.} \\ \text{③ Halbebene.} \end{cases} \quad b = 2 \text{ cm.}$

k^*	l (cm)	63,00	38,24	12,09	8,56	5,41	3,82	3,12	2,70	2,21
	$\frac{\beta^2}{\mu^{2/3}}$	0,003689	0,01	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0
0	①	164,98	60,88	6,144	3,144	1,397	0,8636	0,7171	0,6616	0,6425
	②	0,8205	0,8610	0,7945	0,7708	0,7228	0,6539	0,6262	0,6155	0,6274
	③	10,98	4,960	2,231	1,507	0,9845	0,7500	0,6693	0,6381	0,6349
0,1	①	163,63	59,09	5,973	3,038	1,336	0,8259	0,6867	0,6370	0,6239
	②	0,04431	0,3008	0,4749	0,5650	0,6131	0,6002	0,5897	0,5879	0,6074
	③	2,397	2,680	1,612	1,247	0,8777	0,6959	0,6343	0,6109	0,6167
0,5	①	142,82	52,57	5,145	2,538	1,084	0,6725	0,5718	0,5498	0,5606
	②	0,00802	0,02005	0,1926	0,2425	0,3353	0,4248	0,4874	0,4949	0,5423
	③	0,05526	0,1338	0,4971	0,5514	0,5417	0,5358	0,5063	0,5133	0,5500
1,0	①	106,80	39,28	3,829	1,894	0,7285	0,5090	0,4532	0,4511	0,4989
	②	0,00322	0,00816	0,06046	0,1206	0,2203	0,3071	0,3603	0,4008	0,4792
	③	0,00755	0,01993	0,1400	0,2096	0,2977	0,3509	0,3863	0,4167	0,4805
2,0	①	—	—	1,732	0,8666	0,3877	0,2867	0,2920	0,3200	0,3926
	②	—	—	0,02533	0,04844	0,1058	0,1794	0,2380	0,2895	0,3808
	③	—	—	0,03052	0,05651	0,1163	0,1884	0,2453	0,2944	0,3833
3,0	①	—	—	0,6531	0,3343	0,1784	0,1725	0,2055	0,2466	0,3327
	②	—	—	0,01626	0,02896	0,06901	0,1284	0,1822	0,2327	0,3269
	③	—	—	0,01518	0,02999	0,06987	0,1302	0,1840	0,2340	0,3277
5,0	①	—	0,6260	0,06816	0,03422	0,05752	0,1013	0,1459	0,1910	0,2801
	②	—	0,00469	0,01176	0,01956	0,04675	0,09654	0,1432	0,1893	0,2798
	③	—	0,00100	0,00991	0,01974	0,04937	0,09663	0,1435	0,1893	0,2796

5. Die Knicklast des Verbundstabes.

Zur Behandlung des Knickproblems kann der Stab nicht als schlank angesehen werden, doch könnte die Knicklast bei konstantem E -Modul der Füllschicht mittels der durch die Schubkorrektur modifizierten Euler-Formel berechnet werden (s. II. Teil). Für die Füllschicht von veränderlichem E -Modul schlagen wir hier zunächst ein strenges Verfahren ein.

Wir betrachten jetzt den gesamten Verbundstab aus zwei dünnen Deckschichten und der Füllschicht; er sei gelenkig gelagert und in Richtung seiner Achse einer mittels einer Backe an greifenden Druckkraft P unterworfen. In Bild 6 ist ein Element des unter der Einwirkung von P ausgeknickten Stabes dargestellt. Sind σ_x , σ_y , σ_{xy} die Komponenten des Spannungstensors, so ist σ_y nicht mehr klein von erster Ordnung, es kann aber in der Form

$$\sigma_y = \sigma_y^{(0)} + \bar{\sigma}_y$$

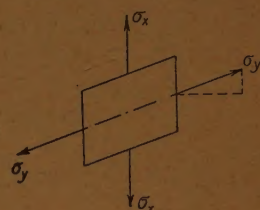


Bild 6.

angesetzt werden, wo $\sigma_y^{(0)}$ konstant und $\bar{\sigma}_y$ von 1. Ordnung klein ist. Für die Verschiebungskomponenten gilt jetzt der Ansatz (2) und mit

$$\sigma_x = E(x) u_x, \quad \sigma_y = E(x) u_y, \quad \tau_{xy} = \frac{E(x)}{2} (u_y + v_x), \quad \sigma_y^{(0)} = \frac{P}{2b}, \quad P \text{ Knickkraft,}$$

erhält man für die Funktion $p(x)$ in Gl. (2) im Falle $x > 0$ die Dgl.

$$p'''' + 2k p''' + (k^2 - 2m^2) p'' - 2m^2 k p' + m^4 p = \frac{m^2 P e^{-kx}}{4b E_m} (p'' - k p' - 2m^2 p). \quad (37).$$

Für $P = 0$ ist sie mit der Dgl. (10) Nr. 1 identisch. Wir betrachten daher die rechte Seite von Gl. (37) als Störungsglied und versuchen die Gleichung durch Iteration zu lösen, indem wir das Integral p (Gl. 12a) von Gl. (10a) als nullte Näherung benützen und in die rechte Seite von Gl. (37) einsetzen.

Mit

$$\vartheta_1 = \frac{3k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} + m^2}, \quad \vartheta_2 = -\frac{3k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} + m^2}$$

wird als erste Näherung für ein Partikulärintegral der inhomogenen Gl. (37) angesetzt:

$$p_1 = (b_0^* + b_1^* x) e^{-\vartheta_1 x} + (b_2^* + b_3^* x) e^{\vartheta_2 x}.$$

Mit $b_r^* = \frac{P}{E_m} b_r$ wird dann $\bar{p}_a = p_h + p_1$ eine 1. Näherung für die allgemeine Lösung der Gl. (37):

$$\bar{p}_a = \left[a_0 + \frac{P}{E_m e^{kx}} b_0 + x \left(a_1 + \frac{P}{E_m e^{kx}} b_1 \right) \right] e^{-\vartheta_1 x} + \left[a_2 + \frac{P}{E_m e^{kx}} b_2 + x \left(a_3 + \frac{P}{E_m e^{kx}} b_3 \right) \right] e^{\vartheta_2 x}.$$

Nach Ausführung des Koeffizientenvergleichs erhält man:

$$\bar{p}_a = e^{-\vartheta_1 x} (a_0 Q_0 + a_1 Q_1 + a_1 Q_0 x) + e^{\vartheta_2 x} (a_2 Q_2 + a_3 Q_3 + a_3 Q_2 x) \dots \quad (38)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= 1 - \frac{P}{E_m e^{kx}} \frac{\varrho_2 (\varrho_2 - 2k)}{16 b k^2}, & Q_2 &= 1 - \frac{P}{E_m e^{kx}} \frac{\varrho_1 (\varrho_1 + 2k)}{16 b k^2}, \\ Q_1 &= \frac{P}{E_m e^{kx}} \frac{2 \varrho_2 (k^2 - m^2) + m^2 k}{16 b k^3 \varrho_1}, & Q_3 &= \frac{P}{E_m e^{kx}} \frac{2 \varrho_1 (k^2 - m^2) - m^2 k}{16 b k^3 \varrho_2} \end{aligned} \right\} \dots \quad (39)$$

Ganz entsprechend ergibt sich

$$\bar{t}_a(x) = e^{-\vartheta_1 x} (a_0 S_0 + a_1 S_1 + a_1 S_0 x) + e^{\vartheta_2 x} (a_2 S_2 + a_3 S_3 + a_3 S_2 x) \dots \quad (40),$$

wobei

$$S_0 = \frac{-m}{\varrho_1} + \frac{P}{E_m e^{kx}} \cdot \left(\frac{\varrho_1}{4 m b} + \frac{\varrho_1 (\varrho_1 + k) (\varrho_2 - 2k)}{16 m b k^2} \right) + \left(\frac{P}{E_m e^{kx}} \right)^2 \cdot \frac{-\varrho_2 (\varrho_1 + k) (\varrho_2 - 2k)}{64 m b^2 k^2}$$

$$S_2 = \frac{m}{\varrho_2} + \frac{P}{E_m e^{kx}} \cdot \left(\frac{-\varrho_2}{4 m b} - \frac{\varrho_2 (\varrho_2 - k) (\varrho_1 + 2k)}{16 m b k^2} \right) + \left(\frac{P}{E_m e^{kx}} \right)^2 \cdot \frac{\varrho_1 (\varrho_2 - k) (\varrho_1 + 2k)}{64 m b^2 k^2}$$

$$S_1 = \frac{m}{\varrho_1^2} + \frac{2}{m} + \frac{P}{E_m e^{kx}} \cdot \left(\frac{-1}{4mb} - \frac{(3\varrho_1 + 2k)(\varrho_2 - 2k)}{16mbk^2} - \frac{(2\varrho_1 + k)(2k^2 - m^2)}{16mbk^3} \right) \\ + \left(\frac{P}{E_m e^{kx}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\varrho_2(\varrho_2 - 2k)}{64mb^2k^2} + \frac{\varrho_2(2\varrho_1 + k)(2k^2 - m^2)}{64mb^2k^3\varrho_1} \right) \\ S_3 = \frac{m}{\varrho_2^2} + \frac{2}{m} + \frac{P}{E_m e^{kx}} \cdot \left(\frac{-1}{4mb} - \frac{(3\varrho_2 - 2k)(\varrho_1 + 2k)}{16mbk^2} + \frac{(2\varrho_2 - k)(2k^2 - m^2)}{16mbk^3} \right) \\ + \left(\frac{P}{E_m e^{kx}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\varrho_1(\varrho_1 + k)}{64mb^2k^2} - \frac{\varrho_1(2\varrho_2 - k)(2k^2 - m^2)}{64mb^2k^3\varrho_2} \right)$$

Analog ergeben sich $q(x)$ und $s(x)$. Die Funktionen p , t , s und q können allerdings nicht für den ganzen Stab einheitlich angesetzt werden, sondern es gelten in den einzelnen Bereichen die aus Bild 7 ersichtlichen Werte, wobei

$$p_I(x) = (\alpha_0 + \alpha_1 x) e^{-mx} + (\alpha_2 + \alpha_3 x) e^{mx} \\ t_I(x) = \left(-\alpha_0 + \frac{3}{m} \alpha_1 - \alpha_1 x \right) e^{-mx} + \left(\alpha_2 + \frac{3}{m} \alpha_3 + \alpha_3 x \right) e^{mx} \\ p_{IV}(x) = (\alpha'_0 + \alpha'_1 x) e^{-mx} + (\alpha'_2 + \alpha'_3 x) e^{+mx} \\ t_{IV}(x) = \left(-\alpha'_0 + \frac{3}{m} \alpha'_1 - \alpha'_1 x \right) e^{-mx} + \left(\alpha'_2 + \frac{3}{m} \alpha'_3 + \alpha'_3 x \right) e^{mx},$$

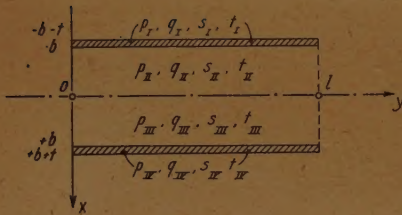


Bild 7.

während für p_{II} , t_{II} die Werte p_a , \bar{t}_a (Gl. 38, 40), für p_{III} , t_{III} die analogen Funktionen \bar{p}_a , \bar{t}_a zu setzen sind.

Entsprechend bezeichnen wir auch die σ_x , σ_y , τ_{xy} mit σ_x^I usw. (Der E -Modul der Deckschicht wird konstant und so groß angenommen, daß die rechte Seite der Dgl. (37) vernachlässigt werden kann, also die Lösung der homogenen Gl. ausreicht.) Wir suchen die Knicklast P unter folgenden Randbedingungen:

Oberer Rand der Deckschicht ($x = b + t$):

$$\sigma_x^I(b+t) = 0 \quad (41a) \quad \tau_{xy}^I(b+t) = 0 \quad (41b),$$

Unterer Rand der Deckschicht:

$$p_I(b) = p_{II}(b) \quad (41c) \quad t_I(b) = t_{II}(b) \quad (41d)$$

$$\sigma_x^I(b) = \sigma_x^{II}(b) \quad (41e) \quad \tau_{xy}^I(b) = \tau_{xy}^{II}(b) \quad (41f).$$

Indem man die Faktoren der \sin - und \cos -Glieder je für sich vergleicht, zerfallen die Gln. (41) von vornherein in 2 völlig identischen Systeme, von denen das eine nur p und t , das andere nur q und s enthält. Es genügt also, mit den Funktionen p und t allein weiterzuarbeiten. Für die Mitte der Füllstoffschicht ($x = 0$) gelten die Bedingungen

$$p'_{II}(0) = p'_{III}(0) \quad (41g) \quad p''_{II}(0) = p''_{III}(0) \quad (41h).$$

(Das Knicken entspricht immer dem asymmetrischen Fall — Nr. 2 —.) Hier ist in der Streifenmitte $\sigma_x = 0$ und $v = 0$, was mit (41g und h) identisch ist, während

$$p_{II}(0) = p_{III}(0) \quad \text{und} \quad p'_{II}(0) = p'_{III}(0)$$

sich automatisch aus der Bedingung der Asymmetrie ergibt.

Hierzu kommen die entsprechenden 6 Bedingungen für den unteren Blech- und Füllstoffrand, die nach Einsetzen der Funktionen p_{II} , ..., t_{IV} die Größen A , α' enthalten. Gemäß Gl. (17) ist in diesen 6 Gln. und in (41a—h) zu setzen:

$$\alpha_2 = A_0 \quad \alpha_3 = -A_1 \\ \alpha'_2 = \alpha'_0 \quad \alpha'_3 = -\alpha'_1$$

Dadurch werden die 6 Gln. für den unteren Rand mit den Gln. (41a) bis (41f) identisch und zusammen mit (41g) und (41h) verbleibt ein System von 8 linearen homogenen Gln. für die 8 Unbekannten α_0 , α_1 , A_0 , A_1 , α'_0 , α'_1 , α'_0 , α'_1 .

In den Bedingungen (41a, b) und (41e, f) ist in den I-Größen die Querkontraktionszahl der Deckschicht mitzubetrachten, also

$$\sigma_x = E_1 \frac{u_x + \nu v_y}{1 - \nu^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{E_1}{2(1 + \nu)} (u_y + v_x)$$

zu setzen, während für die Füllschicht die Querkontraktionszahl vernachlässigt werden kann. Aus der Null gesetzten Determinante des Gleichungssystems (41 a—f) ist die Knicklast P zu ermitteln:

$-m(1-\nu)$	$\frac{-mt(1-\nu)}{+1-3\nu}$	$m(1-\nu)e^{2mt}$	$\frac{-[mt(1-\nu)+1-3\nu]e^{2mt}}{+1-3\nu}$	0	0	0	0
m	$-2+mt$	me^{2mt}	$-(2+mt)e^{2mt}$	0	0	0	0
1	0	1	0	$-Q_0$	$-Q_1-bQ_0$	$-Q_2$	Q_3+bQ_2
-1	$\frac{3}{m}$	1	$-\frac{3}{m}$	$-S_0$	$-S_1-bS_0$	$-S_2$	S_3+bS_2
$\mu_1 m(1-\nu)$	$-\mu_1(1-3\nu)$	$-\mu_1 m(1-\nu)$	$\mu_1(1-3\nu)$	$Q'_0-e_1 Q_0$	$\frac{Q_0+Q'_1-}{-e_1 Q'_1+} + \frac{bQ'_0-}{-e_1 bQ_0}$	$Q'_2+e_2 Q_2$	$-(Q_2+Q'_3+ + e_2 Q'_3+ + Q_2 b e_2 + + b Q'_2)$
$n_1+m n_2$	$-4 n_2$	$n_1+m n_2$	$-4 n_2$	$-S'_0+e_1 S_0$	$\frac{-S_0-S'_1+}{+e_1 S_1-bS'_0+} + \frac{e_1 b S_0}{+e_1 b S_0}$	$-S'_2-e_2 S_2$	$\frac{S_2+S'_3+}{+e_2 S_3+} + \frac{b e_2 S_2+b S'_2}{+b e_2 S_2+b S'_2}$
0	0	0	0	$q'_0-e_1 q_0$	$q_0+q'_1-e_1 q_1$	$(q'_2+e_2 q_2) \cdot A$	$\frac{(q_2+q'_3+}{+e_2 q_3) \cdot A}$
0	0	0	0	$-e_1^3 q_0 + 3 e_1^2 q'_0 - 3 e_1 q''_0 + q'''_0$	$\frac{-e_1^3 q_1 + 3 e_1^2 q'_1 - 3 e_1 q''_1 + q'''_1}{+ q'_1 + 3 e_1^2 q_0 - 6 e_1 q'_0 + 3 q''_0}$	$[e_2^3 q_2 + 3 e_2^2 q'_2 + 3 e_2 q''_2 + q'''_2] \cdot A$	$\frac{[e_2^3 q_3 + 3 e_2^2 q'_3 + 3 e_2 q''_3 + q'''_3 + 3 e_2^3 q_2 + 6 e_2^2 q'_2 + 3 e_2 q''_2 + 3 q'''_2] \cdot A}{+ 3 q'_2}$

= 0

dabei ist:

$$q_\nu = Q_\nu(0), \quad A = e^{-(e_1+e_2)b}, \quad \mu = \frac{E_r}{E_1}, \quad \mu_1 = \frac{1}{\mu(1-\nu^2)},$$

$$n_1 = \frac{m(1-\mu(1+\nu))}{\mu(1+\nu)}, \quad n_2 = \frac{1}{\mu(1+\nu)};$$

Praktisch ist mehr als eine Iteration nicht ausführbar und auch diese nur mit sehr erheblichem Rechenaufwand. Für $l = 63$ cm ergeben sich aber mit einer Iteration noch keine brauchbaren Resultate. Dies ist verständlich, da eine zahlenmäßige Überprüfung für die rechte Seite der Dgl. (37) dann Werte in der Größenordnung 1 ergibt, für $l = 5,41$ cm dagegen in der Größenordnung 10^{-2} . In diesem Falle erhält man für $k^* = 0,5$ und $\mu = 16,68 \cdot 10^{-5}$, $E_1 = 7 \cdot 10^5$ kg cm⁻² und $\nu = 0,3$ den Wert $P = 177,75$ kg, der recht gut zu dem gemäß der elementaren Energiemethode nach Timoshenko erhaltenen Wert (s. II. Teil) paßt.

Eine wesentliche Vereinfachung ergibt sich, wenn man von vornherein nicht von der Dgl. (37) ausgeht, sondern von Gl. (10), die Gleichgewichtsbedingungen also nicht am verformten Stabelement aufstellt, sondern die Verformungsgrößen auf die Randbedingungen wirft. Unter Beibehaltung von p_I , t_I , p_{IV} , t_{IV} verwenden wir p_a , p_A , t_a , t_A — Gln. (12) und (13) — für p_{II} , p_{III} , t_{II} , t_{III} .

Es ist dann die Normalspannung am oberen Rand der Deckschicht gleich der durch den Achsialdruck erzeugten Querbelastrung q zu setzen. Dies führt im Falle $\nu = 0$ auf die Gln. — wir lassen künftig das identische System in q und s wiederum weg —:

$$E_1 \cdot p'_I(b+t) - m^2 P p_I(b+t) = 0, \quad E_1 \cdot q'_I(b+t) - m^2 P q_I(b+t) = 0 \dots (42a).$$

Zweitens soll die Schubspannung am oberen Rande verschwinden:

$$m p_I(b+t) + t'_I(b+t) = 0 \dots (42b)$$

(und dieselbe Gl. in q und s , die wir künftig nicht mehr angeben).

Am unteren Rand, wo Deckschicht und Füllschicht zusammenstoßen, verlangen wir Übereinstimmung von Vertikal- und Horizontalverschiebungen, Normal- und Schubspannungen, d. h.

$$p_I(b) = p_{II}(b) \dots (42c), \quad t_I(b) = t_{II}(b) \dots (42d), \quad E_1 p'_I(b) = E_r p'_{II}(b) \dots (42e),$$

$$E_1 (m p_I(b) + t'_I(b)) = E_r (m p_{II}(b) + t'_{II}(b)) \dots (42f),$$

während in der Mitte $x=0$ wieder die Gln. (41g) und (41h) gelten. Jetzt geht P nur linear in die

Knickdeterminante ein, und diese läßt sich so umformen, daß P als Quotient zweier Viererdeterminanten erscheint. Wir geben diese in Gl. (43) an, indem wir gleichzeitig die Querdehnung ν der Deckschicht mit berücksichtigen:

$$P = \frac{E_1}{m(1-\nu)} \begin{vmatrix} 1 + e^{2mt} \left\{ \frac{3-5\nu}{1+\nu} - \frac{2(1-\nu)}{1+\nu} mt \right\} & mt(e^{2mt} + 1) & m \left\{ \left(1 + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} e^{-(\varrho_1 + \varrho_2)b} \right) - \frac{1}{\varrho_2} (\varrho_1^2 - \varrho_2^2) \left(-\frac{b}{2} + \frac{1}{2\varrho_2} \right) \right\} & m \left\{ b \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} e^{-(\varrho_1 + \varrho_2)b} \right) - \frac{1}{\varrho_1} \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} e^{-(\varrho_1 + \varrho_2)b} \right) \right\} \\ 1 + e^{2mt} \left\{ \frac{3-\nu}{1+\nu} + \frac{2(1-\nu)}{1+\nu} mt \right\} & -\frac{2}{1-\nu} (e^{2mt} + 1) & k + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{b}{2} (\varrho_1^2 - \varrho_2^2) + \varrho_1 \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} e^{-(\varrho_1 + \varrho_2)b} \right) & 2 \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} e^{-(\varrho_1 + \varrho_2)b} \right) + b \varrho_2 \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} e^{-(\varrho_1 + \varrho_2)b} \right) \\ 1 - e^{2mt} \left\{ 1 - \frac{2(1-\nu)}{1+\nu} mt \right\} & -mt(e^{2mt} - 1) & \bar{\mu} \left\{ \varrho_2 (1 - e^{-(\varrho_1 + \varrho_2)b} + \frac{b}{2} (\varrho_1^2 - \varrho_2^2)) \right\} & \bar{\mu} \left\{ b \varrho_2 \left(1 + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} e^{-(\varrho_1 + \varrho_2)b} \right) \right\} \\ 1 - e^{2mt} \left\{ 1 + \frac{2(1-\nu)}{1+\nu} mt \right\} & mt(e^{2mt} + 1) + \frac{1+\nu}{1-\nu} (e^{2mt} - 1) & \bar{\mu} \left\{ m \left(1 + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} e^{-(\varrho_1 + \varrho_2)b} \right) + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{2} + \frac{b}{2} \varrho_1 \right) (\varrho_1^2 - \varrho_2^2) \right\} & \bar{\mu} \left\{ b m \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} e^{-(\varrho_1 + \varrho_2)b} \right) + \frac{\varrho_2}{m} \left(1 + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} e^{-(\varrho_1 + \varrho_2)b} \right) \right\} \end{vmatrix} \quad (43)$$

Es ist: $\bar{\mu} = \mu(1 + \nu)$.

Im Falle $k^* = 0$ vereinfacht sie sich erheblich. Setzt man an Stelle der Bedingung $\tau_{xy}(b+t) = 0$ die (in Nr. 1 für $\nu(b)$ eingeführte) Bedingung $\nu(b+t) = 0$, so ist die Gl. (42b) abzuändern und jetzt schreibt sich P sogar als Quotient zweier Dreierdeterminanten. Es wurden hierzu folgende Zahlenrechnungen ausgeführt:

$$\begin{array}{llll} l = 63 \text{ cm} & k^* = 0, & \nu = 0, & \mu = 16,68 \cdot 10^{-5}: P = 196,23 \text{ kg} \\ l = 8,55 \text{ cm} & k^* = 0, & \nu = 0, & P = 224,97 \text{ kg} \\ & k^* = 0, & \nu = 0,3 & P = 247,22 \text{ kg} \\ & k^* = 0,5 & \nu = 0,3 & P = 154,95 \text{ kg} \end{array}$$

während sich mit der Bedingung $\nu(b+t) = 0$ mit $\nu = 0,3$ sogar ergab:

$$P(k^* = 0): P(k^* = 0,5) = 256,84: 255,20.$$

Die Ergebnisse zeigen, daß die im II. Teil mit der Energiemethode gewonnenen Knicklasten auch im Falle des exponentiell veränderlichen E -Moduls eher zu niedrig als zu hoch gegriffen sind. Hierauf einige Stichproben zu machen, war neben der Darlegung der allgemeinen mathematischen Entwicklung der Zweck dieser Nummer.

Eingegangen: 24. Juni 47.

Einfluß einer schwachen Wandwelligkeit auf den Verlauf der laminaren Grenzschichten.

Teil II.

Von H. Görtler in Freiburg i. Br.

§ 6. Grenzschicht an der welligen Platte für hinreichend kleine Werte von λ/L .

Im folgenden soll der Grenzfall kleiner Werte von $\sigma = \lambda/2\pi L$, der mathematisch einfacher zugänglich ist und daher eine frühzeitige Spezialisierung der Rechnung auf einige wenige Zahlenwerte für σ nicht notwendig macht, näher untersucht werden. Dazu muß zuvor ein Wort über den praktischen Wert dieser Rechnung gesagt werden.

Die Theorie ist wegen der Annahme $U_0 = U_0(y)$ von vornherein auf die Voraussetzung $\sigma \ll 1/2\pi$ (siehe (5.4)) beschränkt. Zum anderen muß die in Zusammenhang mit (5.19) gestellte allgemeine Forderung, daß nämlich die Dicke der Zone, in welcher die äußere Stromlinienwelligkeit außerhalb der Grenzschicht abklingt, groß ist gegenüber der Dicke der Grenzschicht selbst, erfüllt sein, d. h. es muß $\sigma Re^{1/2}(L) \gg 1$ sein. Da $Re(L)$ praktisch jedenfalls auf Werte unter 10^6 beschränkt bleibt, damit die ungestörte Strömung laminar verlaufen kann, muß alles in allem $10^{-3} \ll \sigma \ll 1/2\pi$ sein, so daß $\sigma = \lambda/2\pi L$ auf Werte in der Nachbarschaft des kleinen Zahlenwerts 10^{-2} unseres Beispiels aus § 5 beschränkt bleibt. Das wird also auch für die folgende Theorie gelten, die demnach gegenüber dem Beispiel des § 5 zunächst nur insoweit einen Fortschritt bringen kann, als sie die analytische Abhängigkeit der Ergebnisse von σ in dem verhältnismäßig engen zulässigen σ -Intervall um $\sigma = 10^{-2}$ aufzeigt. Solange man jedoch keine umfassendere Theorie besitzt, wird man die folgenden Ergebnisse wenigstens größenordnungsmäßig auch extrapolatorisch für Werte von σ und Re verwenden, die den obigen Voraussetzungen nicht mehr entsprechen. Es erscheint daher berechtigt, die folgenden Ausführungen zu bringen, die einen tieferen Einblick in die analytischen Zusammenhänge und größenordnungsmäßig brauchbare Regeln bieten. Sie wollen aber wie das Vorangehende nur als erster Vorstoß über die Berechnung numerischer Einzelfälle hinaus gewertet werden.

Wir gehen davon aus, daß das Blasius'sche Plattengrenzschichtprofil (5.6)

$$U_0(y) = \alpha y - \frac{\alpha^2}{2} \frac{y^4}{4!} + \dots$$

($\alpha = 0,33206$) in Wandnähe wegen der in $y = 0$ verschwindenden Krümmung durch das lineare Profil

$$U_0(y) = \alpha y \dots \dots \dots (6.1)$$

gut approximiert werden kann. Noch für $y = 1$ (also bis zum Wandabstand δ_0 , siehe Bild 1) liegt die Abweichung unter 1% des strengen Wertes. In hinreichender Wandnähe kann man daher für (4.3) genähert

$$\left. \begin{aligned} \alpha y f_1' - \alpha f_1 + \sigma g_1'' &= 1 \\ \alpha y g_1' - \alpha g_1 - \sigma f_1'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6.2)$$

schreiben, oder zusammengefaßt für die komplexe Funktion

$$\begin{aligned} h(y) &= f_1(y) + i g_1(y) \text{ (mit } i = \sqrt{-1}) \\ i \sigma h''' - \alpha y h' + \alpha h + 1 &= 0 \dots \dots \dots (6.3). \end{aligned}$$

Das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung (6.3) lautet:

$$h(y) = -\frac{1}{\alpha} + y \int_{y_0}^y Z_{2/3} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{i\alpha}{\sigma}} \eta^{3/2} \right) \frac{d\eta}{\eta} + C y \dots \dots \dots (6.4),$$

wo $Z_{2/3}$ die allgemeine Zylinderfunktion der Ordnung $2/3$ bedeutet:

$$Z_{2/3}(\tau) = C_1 H_{2/3}^{(1)}(\tau) + C_2 H_{2/3}^{(2)}(\tau) \dots \dots \dots (6.4a)$$

(C_1, C_2, C Integrationskonstanten, $H_{2/3}^{(1,2)}$ Hankelsche Funktionen 1. bzw. 2. Art). Schreibt man

$$z = \sqrt[3]{\alpha/\sigma} y \quad (z_0 = \sqrt[3]{\alpha/\sigma} y_0) \dots \dots \dots (6.5)$$

(reelle Wurzel), so wird h als Funktion von z :

$$h(z) = -\frac{1}{\alpha} + z \int_{z_0}^z \left\{ c_1 H_{2/3}^{(1)} \left(\frac{2}{3} \sqrt{i} \zeta^3 \right) + c_2 H_{2/3}^{(2)} \left(\frac{2}{3} \sqrt{i} \zeta^3 \right) \right\} \frac{d\zeta}{\zeta} + c_3 z \quad \dots \quad (6.4b).$$

Nimmt man vorübergehend an, daß die Näherung $U_0 = \alpha y$ nicht nur in Wandnähe (etwa in $0 \leq y \leq 1$), sondern in $0 \leq y \leq \infty$ gilt, und verlangt man neben $h(0) = h'(0) = 0$ nur, daß h' für $y \rightarrow \infty$ endlich bleibt, so werden — siehe unten — durch diese von σ unabhängigen Randbedingungen die Integrationskonstanten c_1, c_2 und c_3 in (6.4b) bereits eindeutig festgelegt. ($h'(\infty) = 0$ läßt sich wegen $U_0 \rightarrow \infty$ für $y \rightarrow \infty$ nicht mehr erreichen.) Die Störungsamplitude h (also f_1 und g_1) wird also eine universelle Funktion von z . Es gibt eine Zahl $z = z_s$, die ein Maß für die Dicke δ_s der „Störungsgrenzschicht“ abgibt derart, daß die Amplitude der Störungsgeschwindigkeit, also $h'(z)$, in $z = z_s$ praktisch (mit vorgebarbarer Genauigkeit) ihren konstanten asymptotischen Wert erreicht hat. Es ist wegen $z = z_s = \text{Zahl} \cdot \sigma^{1/3}$, also, da y mit δ_0 dimensionslos gemacht ist, die Länge $\delta_s = \text{Zahl} \cdot \sigma^{1/3} \cdot \delta_0$. Wegen $\sigma = \lambda/2\pi L$ ist somit

$$\frac{\delta_s}{\delta_0} \sim \sqrt[3]{\frac{\lambda}{L}} \quad \dots \quad (6.6).$$

$\delta_0 = \sqrt[3]{\nu L / \bar{U}_0}$ ist ein Maß für die Dicke der wirklichen ungestörten Plattengrenzschicht. Ist nur λ/L hinreichend klein, so ist also die Dicke δ_s der Störungsgrenzschicht beliebig klein gegenüber der Dicke der ungestörten Grenzschicht, insbesondere so klein, daß die Zone von der Wand bis zum Wandabstand δ_s innerhalb jener Zone liegt, in der in praktisch ausreichender Näherung wirklich $U_0 = \alpha y$ gesetzt werden kann. Für $y > 1$ muß die Krümmung des Profils $U_0(y)$ berücksichtigt werden. Hier schließt sich die mit δ_s von σ abhängige jeweilige asymptotische Lösung an. Die wesentlichen relativ großen Störungsbeträge liegen innerhalb der Zone bis zum Wandabstand δ_s . Hier allein (bis $h'(z)$ seinen konstanten asymptotischen Wert erreicht, siehe Glieder mit σ in Gl. (6.2)) wirken sich die Reibungskräfte maßgeblich auf den Störungsverlauf aus. (Die Störung greift natürlich, der vorgegebenen äußeren Geschwindigkeit $\bar{U}_0 + \varepsilon \cos x$ entsprechend, bis in die äußere Potentialströmung hinein.) Als „Störungsgrenzschicht“ bezeichnen wir hier also jene wandnahe Zone, in der durch die Störungen hervorgerufene Reibungskräfte wirksam werden. Hier erfolgt die relativ stärkste Störung, während außerhalb der Störungsgrenzschicht die Reibung für den Verlauf der Störungen nur noch gemäß dem Verlauf von $U_0(y)$ schwach ins Gewicht fällt. Für Einzelheiten sei auf die folgende Rechnung verwiesen.

Als wichtiges erstes Ergebnis dieser Betrachtung ist somit auszusagen: Ist das Verhältnis der Störungswellenlänge λ zur überströmten Wandlänge L nur hinreichend klein, so wird die „Störungsgrenzschicht“, in der die Reibungskräfte sich auf den Störungsverlauf wesentlich auswirken, nur eine relativ sehr dünne wandnahe Zone („Untergrenzschicht“) innerhalb der ungestörten Plattengrenzschicht einnehmen. Ihre Dicke wird proportional $\sqrt[3]{\lambda/L}$ klein im Verhältnis zur ungestörten Grenzschichtdicke.

Für Wandnähe wurden oben (siehe (4.4)) Reihenentwicklungen nach Potenzen von y angesetzt. Unter der Annahme $U_0 = \alpha y$ wird die Ermittlung der Beiwerte dieser Reihen besonders einfach. Überdies gestattet die — für das praktische Rechnen unmittelbar wenig geeignete — Lösung (6.4), die in den Reihenentwicklungen zunächst freibleibenden Parameter β_2 und γ_2 leicht zu berechnen. Dies soll im folgenden geschehen. Es werde also nunmehr weiterhin der Grenzfall sehr kleiner σ -Werte angenommen.

Um aus dem allgemeinen Integral (6.4) das hier gesuchte partikuläre Integral auszusondern, müssen einmal an der Wand die Randbedingungen $h(0) = h'(0) = 0$ erfüllt werden, zum anderen muß bei Zugrundelegung des Profils $U_0(y) = \alpha y$ in $0 \leq y \leq \infty$ für wachsende y zumindest verlangt werden, daß $h'(y)$ endlich bleibt. Setzen wir der Einfachheit halber die untere Integralgrenze y_0 in (6.4) zu

$$y_0 = \infty \quad \dots \quad (6.4c)$$

fest, so ergibt schon die letzte Forderung in (6.4) mit (6.4a)

$$C_2 = 0 \quad \dots \quad (6.7),$$

wie man ohne weiteres aus dem bekannten asymptotischen Verhalten der Hankelschen Funktionen folgert. Es ist dabei angenommen, daß σ so klein ist, daß die asymptotischen Werte in der

Zone, in welcher in Wirklichkeit $U_0 = \alpha y$ gesetzt werden kann, praktisch erreicht werden. Es wird sich zeigen (siehe unten), daß etwa $\sigma \leq 10^{-2}$ sein muß.

Die Bestimmung von C_1 erfolgt allein auf Grund der Forderung $h(0) = 0$. Es ist nach leichter Rechnung unter Verwendung der Reihenentwicklung von $H_{2/3}^{(1)}$

$$\lim_{y \rightarrow 0} y \int_{-\infty}^y H_{2/3}^{(1)} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{i\alpha}{\sigma}} \eta^{3/2} \right) \frac{d\eta}{\eta} = \sigma^{1/3} 3^{2/3} e^{-2\pi i/3} / \alpha^{1/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \sin 2\pi/3,$$

also

$$C_1 = -\sigma^{-1/3} \alpha^{-2/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) 3^{-2/3} e^{2\pi i/3} \sin(2\pi/3) \quad \dots \quad (6.8).$$

Ebenfalls mit Hilfe der Reihenentwicklung von $H_{2/3}^{(1)}$ ergibt sich nunmehr, da C_1 und C bekannt sind,

$$h''(0) = -2 \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) e^{2\pi i/3} / 3^{4/3} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \alpha^{1/3} \sigma^{2/3} \quad \dots \quad (6.9),$$

somit wegen $h(y) = f_1(y) + i g_1(y)$

$$\left. \begin{aligned} \beta_2 = f_1''(0) \\ \gamma_2 = g_1''(0) \end{aligned} \right\} = \frac{2 \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^{4/3} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \alpha^{1/3} \sigma^{2/3}} \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right. \quad \dots \quad (6.10).$$

Für das numerische Beispiel $\sigma = 10^{-2}$ des § 5 ergab sich (siehe (5.8)) $\beta_2 = 21,1$, $\gamma_2 = -37,3$. Nach (6.10) wird für $\sigma = 10^{-2}$ wegen $\alpha = 0,33206$, $\Gamma(1/3) = 2,6789$, $\Gamma(5/3) = 0,90275$ zum Vergleich $\beta_2 = 21,3$, $\gamma_2 = -37,0$. Während in § 5 die Werte von β_2 und γ_2 mit Hilfe des Anschlusses der wandnahen Lösungen an die asymptotischen Lösungen mit einem zulässigen Rechenfehler von etwa 1% gewonnen wurden, ergeben sie sich hier aus den als Funktionen von $z = y^{1/3}(\alpha/\sigma)$ universellen wandnahen Lösungen unter der Voraussetzung hinreichend kleiner σ -Werte. Man erkennt, daß für $\sigma = 10^{-2}$ die Übereinstimmung bereits erzielt ist. Wir werden weiter unten erkennen, daß in der Tat $\sigma = 10^{-2}$ bereits einigermaßen in den Bereich der hier zulässigen kleinen σ -Werte fällt, so daß eine gute Näherung erwartet werden mußte, womit sich zugleich eine gegenseitige Bestätigung der verschiedenen gearteten Rechnungen von § 5 und § 6 ergibt.

Man kann vermöge (6.10) bereits den Verlauf der Wandschubspannung angeben. Es ist ja in den gewählten Dimensionslosen (siehe (5.14))

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y}(x, 0) &= \alpha + \varepsilon \{ \beta_2 \cos x + \gamma_2 \sin x \} \\ &= \alpha \left[1 + \varepsilon \frac{|h''(0)|}{\alpha} \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (6.11).$$

Nach dieser Theorie der 1. Ordnung in ε ist also der Reibungswiderstand der Wandwellenlänge λ der gewellten Wand gleich jenem der gleichen Länge der glatten Wand. Die Wandschubspannung schwankt periodisch um den Wert der Wandschubspannung der ebenen Platte (im betrachteten Intervall einiger Wellenlängen, in welchem unsere approximativen Ansätze gelten). Erst die hier nicht berücksichtigten quadratischen Glieder in ε bringen eine Abweichung der Reibungswiderstände der ebenen und der gewellten Platte. Diese Abweichung wird also in zweiter Ordnung bezüglich ε klein. Wir kommen am Schluß dieses Paragraphen auf die Frage des Widerstandes — zum Reibungswiderstand kommt noch der Druckwiderstand hinzu — ausführlicher zurück. In erster Ordnung bezüglich ε , also für hinreichend kleine Welligkeiten, gilt nach (6.11): Die Wandschubspannung läuft der Schwankung des äußeren Druckes $p - p_0 = -\rho \bar{U}_0^2 \varepsilon \cos x$ mit einer Phasenverschiebung von $2\pi/3 = 120^\circ$ nach. (In dem numerischen Beispiel $\sigma = 10^{-2}$ des § 5 ergab sich $119,5^\circ$ als Phasenverschiebung.) Der äußeren „wirksamen“ Welle der Stromlinien am Rande der Grenzschicht (siehe (5.17)) läuft die Wandschubspannung entsprechend in der Phase um $\pi/3 = 60^\circ$ voraus.

Nach (6.9) ist $\alpha/|h''(0)| = 0,16764 \sigma^{2/3}$. Diese Zahl gibt nach (6.11) denjenigen ε -Wert an, für den bei von 0 an wachsendem ε erst als $\partial U/\partial y$ an der Wand verschwindet (und zwar in $x = 120^\circ$, also 120° hinter dem Minimum, 30° hinter dem Wendepunkt und 60° vor dem Maximum

des äußeren Drucks). Als Ablösungskriterium ergibt sich somit die Aussage: Ist

$$\varepsilon > 0,168 \sigma^{2/3} \dots \dots \dots (6.12),$$

so tritt Ablösung der Grenzschicht ein. Dabei erfolgt Rückströmung in Wandnähe in jenem x -Intervall, für das $\varepsilon \cos(x + \pi/3) < -0,168 \sigma^{2/3}$ ist, also innerhalb eines zu $x = 120^\circ$ symmetrischen Intervalls. Leider gibt ε erst ein Maß für die Amplitude der wirklichen Welle am äußeren Rande der Grenzschicht. Die wirkliche Wand muß wie in § 5 erst noch ermittelt werden (siehe unten). Das numerische Beispiel $\sigma = 10^{-2}$ des § 5 liefert zum Vergleich wegen $\varepsilon_{\text{krit}} = 0,00775$ in guter Übereinstimmung mit (6.12) als kritische Zahl $\varepsilon/\sigma^{2/3} = 0,167$, was wiederum als Kontrolle der dortigen Rechnungen dienen kann, da der kleine Wert $\sigma = 10^{-2}$, wie schon im voraus bemerkt wurde, den Voraussetzungen für die Gültigkeit der vorliegenden Theorie einigermaßen entspricht (siehe unten).

Das zahlenmäßige Resultat des einfachen Gesetzes (6.12) beansprucht natürlich nur größenordnungsmaßige Richtigkeit. Man bedenke, daß „Störungen“, die zu einer Ablösung führen, im Rahmen einer linearisierten Störungstheorie kaum in mehr als größenordnungsmaßiger Näherung erfaßt werden dürften. Gerade hier bieten nun die von Quick und Schröder [9] numerisch berechneten Beispiele eine willkommene Kontrollmöglichkeit. Von den vier dort mitgeteilten Beispielen scheiden die beiden letzten für diesen Zweck sicher aus, da sie Fälle betreffen, die auf σ -Werte von ungefähr 0,3 bzw. 0,4 führen, während sich die vorliegende Theorie, siehe (5.4), auf $\sigma \ll 1/2\pi$ beschränkt. In den dortigen Beispielen wird zunächst als Anlauf ein ebener Plattenteil der Tiefe L_0 überströmt, an das sich von hier an eine gewellte Platte anschließt. Im ersten Beispiel ist $\varepsilon = 0,005$ und $\lambda/L_0 = 0,072$, im zweiten $\varepsilon = 0,01$, $\lambda/L_0 = 0,72$ (im dritten Beispiel $\varepsilon = 0,025$, $\lambda/L_0 = 0,72$, im vierten Beispiel $\varepsilon = 0,05$, $\lambda/L_0 = 0,72$). Die Länge L unserer obigen Theorie gibt definitionsgemäß eine mittlere Länge an in dem Intervall einiger Wellenlängen, in dem die Strömung durch die gemachten Ansätze approximiert wird. Betrachten wir die Umgebung jener Wandstellen, wo in den Quick-Schröder'schen Beispielen Ablösung zuerst eintritt, so ist sinngemäß L als überströmte Länge bis zur Ablösungsstelle zu wählen. Im ersten der genannten Beispiele entnimmt man den Quick-Schröder'schen Abbildungen $L/L_0 = 1,26$, im zweiten Beispiel 4,30 (dagegen schon Ablösung bei 1,40 bzw. 1,31 im dritten bzw. vierten Beispiel). Es wird also im ersten Beispiel $2\pi L/\lambda = \sigma^{-1} = 110$, somit $\varepsilon \sigma^{-2/3} = 0,115$. Das ist bereits eine größenordnungsmäßig erfreuliche Übereinstimmung mit unserer Theorie, die den größeren Zahlenwert 0,168 für hinreichend kleines σ liefert. Das zweite Quick-Schröder'sche Beispiel ergibt $\sigma^{-1} = 37,5$, also einen schon etwas kleinen Wert für den Vergleich mit unserer Theorie. Erstaunlich ist aber, daß als kritischer Zahlenwert $\varepsilon \sigma^{-2/3}$ hieraus praktisch unverändert gegenüber dem obigen Wert 0,115 nunmehr 0,112 resultiert! Es dürfte demnach unsere Zahl 0,168 der Theorie, die ja eigentlich nur für sehr kleine ε und σ anwendbar ist, etwas zu groß sein, das allgemeine Ablösungsgesetz $\varepsilon \cdot \sigma^{-2/3} = \text{Zahl}$ scheint jedoch weitgehend brauchbar zu sein. (Soweit ich gegenwärtig voraussehen kann, bringt eine Theorie der 2. Ordnung in ε eine Verkleinerung der Zahl 0,168, aber sie dürfte noch immer merklich größer als 0,11 bleiben.)

Um Aussagen über die Verdrängungsdicke der Grenzschicht und damit über den Verlauf der Wand zu erhalten, die zu der angesetzten periodischen Störung der äußeren Geschwindigkeit führt, muß nun erst der Gesamtverlauf von f_1 und g_1 ermittelt werden. Dies soll zunächst in jener wandnahen Zone durchgeführt werden, wo U_0 durch das lineare Profil αy hinreichend approximiert wird. In dieser Zone sind f_1 und g_1 universelle Funktionen der Veränderlichen $z = y^{1,3}(\alpha/\sigma)$. Die Reihenentwicklungen von f_1 und g_1 nach Potenzen von z , die aus (6.4b) abgeleitet werden können bzw. aus (4.4) entstehen, zeigen hier besonders einfache Koeffizientengesetze. Setzt man ähnlich wie in (4.6)

$$\left. \begin{aligned} f_1(z) &= \bar{\beta}_2 \bar{A}_1(z) + \bar{\gamma}_2 \bar{A}_2(z) + \frac{1}{\alpha} \bar{A}_3(z) \\ g_1(z) &= -\bar{\beta}_2 \bar{A}_3(z) + \bar{\gamma}_2 \bar{A}_1(z) + \frac{1}{\alpha} \bar{B}_3(z) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6.13)$$

mit den universellen Konstanten $\bar{\beta}_2, \bar{\gamma}_2$ definiert durch

$$\bar{\beta}_2 + i\bar{\gamma}_2 = \left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^{2/3} \cdot (\beta_2 + i\gamma_2) = -2\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) e^{\frac{2\pi i}{3}} / 3^{4/3} \alpha \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \dots \dots \dots (6.14),$$

also

$$\bar{\beta}_2 = 2,0655, \quad \bar{\gamma}_2 = -3,5775 \dots \dots \dots (6.14a),$$

so ergibt sich nach einfacher Rechnung:

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_1(z) &= \frac{z^2}{2!} - 4 \cdot \frac{z^8}{8!} + 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \frac{z^{14}}{14!} - 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 16 \cdot \frac{z^{20}}{20!} + \dots \\ \bar{A}_2(z) &= \frac{z^5}{5!} - 4 \cdot 7 \cdot \frac{z^{11}}{11!} + 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot \frac{z^{17}}{17!} - 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 16 \cdot 19 \cdot \frac{z^{23}}{23!} + \dots \\ \bar{A}_3(z) &= 2 \cdot \frac{z^6}{6!} - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{z^{12}}{12!} + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14 \cdot \frac{z^{18}}{18!} - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14 \cdot 17 \cdot 20 \cdot \frac{z^{24}}{24!} + \dots \\ \bar{B}_3(z) &= \frac{z^3}{3!} - 2 \cdot 5 \cdot \frac{z^9}{9!} + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \frac{z^{15}}{15!} - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14 \cdot 17 \cdot \frac{z^{21}}{21!} + \dots \end{aligned} \right\} (6.15).$$

Bei der numerischen Auswertung wurden die ausgeschriebenen Glieder berücksichtigt. Sie reichen aus, um nach (6.13) $f_1(z)$, $g_1(z)$ und deren Ableitungen nach z von $z = 0$ an bis zu jenen z -Werten zu berechnen, für die f_1 und g_1 praktisch fortan linear von z abhängen, df_1/dz und dg_1/dz also konstante Werte (ihre asymptotischen Werte bei Zugrundelegung des Profils $U_0 = \alpha y$ in $0 \leq y \leq \infty$) annehmen. Dies ist bei etwa $z = 3$ erreicht, wie man aus dem in Bild 11 dargestellten Verlauf

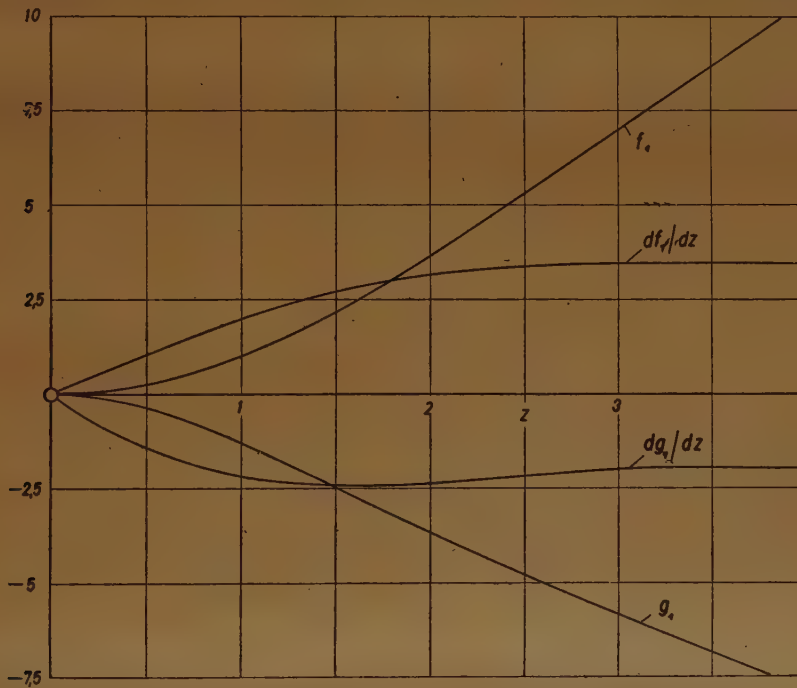


Bild 11. Verlauf der Störungsfunktionen $f_1(z)$, $g_1(z)$ und ihrer Ableitungen nach z .

der Funktionen und ihrer Ableitungen erkennt. Man ermittelt aus diesem Bilde, daß für den asymptotisch erreichten linearen Verlauf

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= 3,44 z - 3,32 \\ g_1 &= -2,00 z + 0,27 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6.16)$$

ist. (Die Koeffizienten von f in (6.16) sind mit einem Fehler von maximal $1/2^0/0$, die von g mit maximal $2^0/0$ ermittelt.)

Nun gilt die Approximation der ungestörten Grenzschicht $U_0(y)$ durch ein lineares Profil αy in guter Näherung für $y \leq 1$ (siehe oben), also ist unsere Theorie der obigen wandnahen Lösungen für $z \leq (\alpha/\sigma)^{1/3}$ anwendbar. Andererseits muß z bis etwa zu Werten ≥ 3 wachsen können, damit das durch (6.16) gekennzeichnete asymptotische Verhalten der Störungsfunktionen und ihrer ersten Ableitungen nach z in dieser wandnahen Zone mit $1^0/0$ Abweichung erreicht wird. (Diese Annahme, daß die asymptotischen Werte bereits in dieser Schicht erreicht werden, liegt schon dem Ergebnis (6.7) zugrunde.) Aus diesen beiden Forderungen folgt mit $\alpha = 0,33$ größenordnungsmäßig, daß

$$\sigma \leq 10^{-2}$$

sein muß. Es bestätigt sich also, daß unser Beispiel aus § 5 gerade noch von der Theorie des § 6 erfaßt wird, worauf schon die verschiedenen zahlenmäßigen Vergleiche hingewiesen haben. (Für

Für $y \rightarrow \infty$ erhält man nach (5.11) wegen (6.17)

$$\lim_{y \rightarrow \infty} (f_1 - y) = -6,24 + 0,17 \sigma + \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^{1/3} \{10,43 - 1,27 \sigma\},$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} g_1 = 0,82 + 0,45 \sigma + \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^{1/3} \{-6,06 - 2,18 \sigma\},$$

und also wegen $\sigma \leq 10^{-2}$ (also $(\alpha/\sigma)^{1/3} \geq 3,2$) ohne wesentlichen Genauigkeitsverlust weniger schwerfällig:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} (f_1 - y) &= -6,24 + 10,43 \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^{1/3} \\ \lim_{y \rightarrow \infty} g_1 &= 0,82 - 6,06 \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^{1/3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6.18).$$

(Die vernachlässigten Glieder gehen gerade aus den σ -Gliedern in (4.9) hervor, die den Reibungseinfluß auf die Außenlösung erfassen.)

Die Verdrängungsdicke δ^* der gestörten Grenzschicht ergibt sich (siehe (5.20)) zu

$$\delta^* = \delta_0^* - \varepsilon \delta_0 D(\sigma) \cos(x + \psi)$$

mit $\delta_0^* = 1,72 \delta_0$ (Verdrängungsdicke der ungestörten Grenzschicht)

und $D(\sigma) = [a^2 + b^2]^{1/2}$, $\operatorname{tg} \psi = -b/a$ (6.19),

wo $a = 4,52 - 10,43 \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^{1/3}$,

$$b = -0,82 + 6,06 \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^{1/3}.$$

Die Phasenkonstante ψ erweist sich für $\sigma \leq 10^{-2}$ als nur schwach von σ abhängig. (Von $Re(L)$ ist sie unabhängig.) Für $\sigma = 10^{-2}$ ist $\psi = 32,5^\circ$, und ψ nimmt mit abnehmendem σ monoton ab, um im theoretischen Grenzfall $\sigma \rightarrow 0$ gegen $\psi = 30,2^\circ$ zu konvergieren. Praktisch wird es genügen, mit $\psi \approx 30^\circ$ zu rechnen.

Analog zu (5.25) erhält man als Wandstromlinie

$$y_W(x) = \frac{A_W}{\delta_0} \cos(x + \varphi) - 1,72 \dots \dots \dots (6.20),$$

wobei

$$\begin{aligned} A_W &= \varepsilon \delta_0 [(\sigma Re^{1/2} - a)^2 + b^2]^{1/2} \\ \operatorname{tg} \varphi &= b/(\sigma Re^{1/2} - a) \end{aligned} \dots \dots \dots (6.20a),$$

($Re = Re(L) = \bar{U}_0 L/\nu$). Die Länge A_W , die Amplitude der Wandwelle, ist neben der Wellenlänge λ als gegeben anzusehen. Daraus berechnet sich dann die Amplitude $A_0 = \varepsilon/\beta$ der wirklichen Welle am äußeren Rande der Grenzschicht nach (6.20 a) vermöge

$$\frac{A_0}{A_W} = \frac{\sigma Re^{1/2}}{[(\sigma Re^{1/2} - a)^2 + b^2]^{1/2}} \dots \dots \dots (6.21).$$

Schreibt man $\delta^* = \delta_0^* - A_{\delta^*} \cos(x + \psi)$, so ist nach (6.19) und (6.20 a)

$$\frac{A_{\delta^*}}{A_W} = \left[\frac{a^2 + b^2}{(\sigma Re^{1/2} - a)^2 + b^2} \right]^{1/2} \dots \dots \dots (6.22).$$

Im Bild 14 und 15 sind die Ergebnisse (6.21) und (6.22) aufgetragen, wobei allerdings wegen der einleitend in diesem Paragraphen betonten Einschränkungen weite Teile der Kurvenbilder nur theoretisches und bestenfalls größenordnungsmäßig praktisches Interesse haben. Sie sollen in erster Linie die allgemeine Tendenz bei variablem λ und L deutlich machen und sprechen für sich.

Bild 16 gibt die zugehörigen Werte der Phasenverschiebung φ an. Sie ist für kleine σ , wie das Bild zeigt, praktisch wieder gleich $\approx 30^\circ$. (Da in diesen Bildern Re und σ mit L gebildet werden, deutet man wachsendes $\sigma = \lambda/2\pi L$ zweckmäßig als wachsende Wellenlänge bei festem Ort L .)

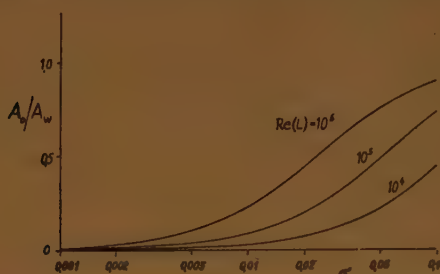


Bild 14. Verhältnis der Amplituden von wirksamer und wirklicher Welle.

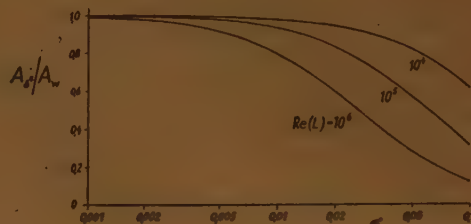


Bild 15. Verhältnis der Amplituden von Verdrängungsdickenschwankung und Wandwelle.

Das Ablösungskriterium (6.12) ergibt Ablösung, wenn die kritische Amplitude der Wandwelligung

$$A_{w\text{krit}} = 0,168 \sigma^{2/3} \delta_0 [(\sigma Re^{1/2} - a)^2 + b^2]^{1/2} \dots \dots \dots (6.23)$$

oder wenn die maximale Steigung βA_w der Wandkontur den kritischen Wert

$$(\beta A_w)_{\text{krit}} = 0,168 \sigma^{-1/3} Re^{-1/2} [(\sigma Re^{1/2} - a)^2 + b^2]^{1/2} \dots \dots \dots (6.23a)$$

überschreitet. (Es ist $\beta \delta_0 = 1/\sigma Re^{1/2}$.) Es sei daran erinnert, daß eine genauere Theorie statt des Koeffizienten 0,168 eine etwas kleinere Zahl liefern wird (siehe oben). In Bild 17 ist $(\beta A_w)_{\text{krit}}$ dargestellt. Es gilt bezüglich der Gültigkeit auch hier die zu Bild 14 bis 16 gemachte Bemerkung. Insbesondere sind hier die Zahlenwerte durchweg nur größenordnungsmäßig zu verstehen in demselben Maße, wie die Zahl 0,168 unsicher ist.

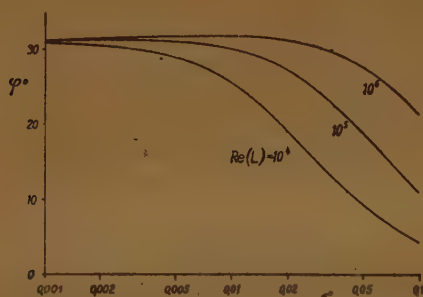


Bild 16. Phasenverschiebung zwischen der Schwankung der äußeren Geschwindigkeit und der Wandwelle.

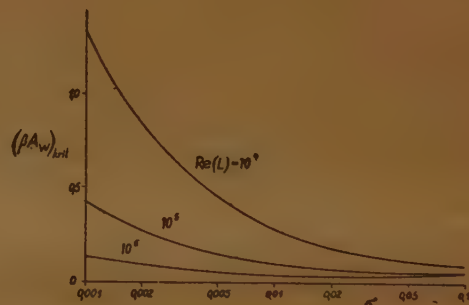


Bild 17. Kritische Maximalsteigung der Wandkontur, bei deren Überschreitung Ablösung erfolgt.

Zum Schluß noch ein Wort über den Widerstand der welligen Wand. Es wurde schon oben betont, daß der Reibungswiderstand pro Wellenlänge sich erst in der 2. Ordnung bezüglich ε gegenüber dem entsprechenden Wert bei der ebenen Platte ändert. Dieser Unterschied konnte daher in der bisher dargestellten Theorie der 1. Ordnung in ε nicht erfaßt werden. In der allgemeinen Fourier-Reihe für die Stromfunktion

$$\Psi = \frac{a_0(y)}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} \{a_v(y) \cos vx + b_v(y) \sin vx\}$$

wurden bisher nur die in ε linearen Glieder $a_1 = \varepsilon f_1(y)$ und $b_1 = \varepsilon g_1(y)$ berücksichtigt. Das für die obengenannte Änderung des Reibungswiderstandes einer Wellenlänge λ maßgebende Glied nullter Ordnung $a_0/2$ erweist sich als in ε quadratisch. Die Rechnung, die an späterer Stelle bei der Darstellung der Theorie 2. Ordnung wiedergegeben werden soll, liefert das Ergebnis, daß der Reibungswiderstand $\bar{W}_R(\lambda; L)$ einer Wellenlänge λ der welligen Wand in der Umgebung der Stelle L kleiner ist als der Reibungswiderstand $\bar{W}_R(\lambda; L)$ des entsprechenden Teilstücks einer ebenen Platte, und zwar wird

$$W_R(\lambda; L) = \bar{W}_R(\lambda; L) \cdot \left\{ 1 - \frac{b \varepsilon^2}{2 \sigma \alpha} \right\} \dots \dots \dots (6.24),$$

wo die Zahl b in (6.19) definiert ist. Der Zahlenwert des durch die geschweifte Klammer erfaßten Faktors ist z. B. im Falle von Bild 7 und 9 etwa 0,72 und in dem in Bild 8 und 10 dargestellten Falle etwa 0,93. Es machen sich also recht beträchtliche Verkleinerungen bemerkbar. Eine Verkleinerung des Reibungswiderstandes durch schwache Welligkeiten beobachteten bereits Quick und Schröder [9] an ihren Zahlenbeispielen. Man darf aber nun aus diesem Sachverhalt nicht schließen, daß der Widerstand einer welligen Wand geringer wäre als derjenige einer ebenen Wand! Gegenüber dem Fall der ebenen Wand tritt bei der welligen Wand zum Reibungswiderstand noch ein Druckwiderstand hinzu. Auch der Druckwiderstand ist von der 2. Ordnung in ε . Er soll im folgenden berechnet werden. Zunächst soll jedoch noch der Reibungswiderstand der einseitig überströmten ebenen Platte der Länge L und der Breite B angegeben werden [1]:

$$W_R(L) = \varrho \frac{\bar{U}_0^2}{2} \cdot BL \cdot 4\alpha \cdot Re^{-1/2}(L) \dots \dots \dots (6.25).$$

Der Beitrag des Plattenstücks von L bis $L + \lambda$ zum Reibungswiderstand ist also wegen $W_R(L) \sim L^{1/2}$

$$\bar{W}_R(\lambda; L) = W_R(L + \lambda) - W_R(L) = W_R(L) \cdot \lambda/2L \left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}} \right\} \dots \dots \dots (6.26). \\ = W_R(L) \cdot \pi \sigma$$

Somit ist nach (6.24)

$$\bar{W}_R(\lambda; L) = W_R(L) \pi \sigma \left\{ 1 - \frac{b\varepsilon^2}{2\alpha\sigma} \right\} \dots \dots \dots (6.27).$$

Der Druckwiderstand der welligen Wand berechnet sich aus dem vorgegebenen Druckverlauf

$$p - p_0 = -\varrho \bar{U}_0^2 \varepsilon \cos x \dots \dots \dots (6.28)$$

und der Wandkontur

$$y_W \cdot \delta_0 = A_W \cos(x + \varphi) \dots \dots \dots (6.29)$$

(y_W war wie alle y -Abmessungen mit δ_0 dimensionslos gemacht.) Der Beitrag einer Wellenlänge von L bis $L + \lambda$ der welligen Wand (Breite wieder B) wird

$$\bar{W}_D(\lambda; L) = B \delta_0 \int_0^{2\pi} p \, dy \left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}} \right\} \dots \dots \dots (6.30) \\ = \frac{\varrho \bar{U}_0^2}{2} B L \frac{2\pi\varepsilon}{L} A_W \sin \varphi$$

Wegen $A_W \sin \varphi = \lambda b \delta_0$ (siehe (6.20a)) und (6.25), sowie wegen $\delta_0/L = Re^{-1/2}(L)$ wird

$$\bar{W}_D(\lambda; L) = W_R(L) \frac{\pi \varepsilon^2 b}{2\alpha} \dots \dots \dots (6.31).$$

Der Beitrag der Welle von L bis $L + \lambda$ zum Gesamtwiderstand ist $\bar{W}(\lambda; L) = \bar{W}_R(\lambda; L) + \bar{W}_D(\lambda; L)$ und also nach (6.24) und (6.26), (6.31):

$$\bar{W}(\lambda; L) = \bar{W}_R(\lambda; L) \dots \dots \dots (6.32).$$

Die gegenüber der ebenen Platte sich ergebende Verminderung des Reibungswiderstandes durch Oberflächenwelligkeit wird gerade durch den zusätzlich hinzutretenden Druckwiderstand kompensiert.

Diese Aussage gilt in zwei Ordnungen bezüglich ε . Wir können das Ergebnis sorgfältiger auch so formulieren, daß der Widerstand $\bar{W}(\lambda; L)$ der Welle sich von dem Widerstand $\bar{W}_R(\lambda; L)$ des entsprechenden ebenen Plattenstücks erst in 3. Ordnung bezüglich ε unterscheiden kann:

$$\bar{W}(\lambda; L) - \bar{W}_R(\lambda; L) = 0(\varepsilon^n) \text{ mit } n \geq 3 \dots \dots \dots (6.33).$$

§ 7. Zusammenfassung.

Zur Untersuchung des Einflusses von Welligkeiten umströmter Wände auf den Verlauf der laminaren Grenzschicht wird eine Theorie entwickelt, die sich im Sinne einer Störungstheorie der 1. Ordnung auf schwache (periodische) Welligkeiten bezieht und die ferner von Vereinfachungen Gebrauch macht, die sich mathematisch für kleine Wellenlängen λ (klein relativ zur überströmten

Wandbogenlänge L) ergeben. Sie gibt eine genäherte Darstellung der Strömungsverhältnisse jeweils im Bereich einiger Wellenlängen um die gerade interessierende Wandstelle L . Als Grundströmung wird in der numerischen Durchführung die Blasius'sche Grenzschicht an der ebenen Platte angenommen. Deren Veränderung durch zusätzliche kleine Welligkeiten der Platte wird zunächst auf Grund allgemein entwickelter Methoden für $\sigma = \lambda/2\pi L = 10^{-2}$ (Wandstelle L etwa 16 Wellenlängen von der Plattenvorderkante stromabwärts) bei variabler Wellenlänge, Amplitude und Reynoldsscher Zahl numerisch ermittelt und an Beispielen erläutert. Diese Rechnungen dienen als Vorstudie und Kontrollmöglichkeit für die darauf folgende allgemeine Durchführung des Grenzfalles sehr kleiner σ -Werte, wobei nunmehr alle Parameter variabel bleiben, jedoch σ größenordnungsmäßig auf Werte $\leq 10^{-2}$ beschränkt bleibt. (Da die Theorie ohnehin von vornherein $\lambda \ll L$, also $\sigma \ll 1/2\pi$ voraussetzt, bedeutet dies keine neue Einschränkung.)

Unter den genannten Voraussetzungen und soweit die Grenzschichttheorie überhaupt anwendbar bleibt, ergibt sich das folgende Verhalten. Die Welligkeit der Wand wirkt sich sehr stark auf den Verlauf der Grenzschichtströmung aus. Die Störungen gegenüber dem Fall der ebenen Platte sind in nächster Wandnähe relativ am stärksten. Am äußeren Rande der Grenzschicht ist jedoch die Stromlinienwelligkeit gegenüber der Wandwelligkeit bereits sehr stark abgemildert. Diese Merkmale traten bereits in den von Quick und Schröder [9] berechneten numerischen Beispielen zutage. Die Dicke δ_s der wandnahen „Störungsgrenzschicht“, in welcher durch die Störung verursachte Reibungskräfte wirksam werden, ist klein gegenüber der Dicke δ der ungestörten Grenzschicht, und zwar gilt das einfache Gesetz, daß

$$\delta_s : \delta \sim \sqrt[3]{\lambda/L}$$

ist. Wenn nur genügend Wellenlängen überströmt werden, kommt es zur Ablösung der Grenzschicht (wie auch schon Quick und Schröder an dem Verhalten der von ihnen berechneten numerischen Beispiele demonstrierten). Zunächst erfolgt lediglich in allernächster Wandnähe innerhalb der kleinen Störungsgrenzschicht Ablösung mit Wiederanlegen, wobei im abgeschlossenen Wirbel des Rückströmungsgebietes praktisch Totwasser herrscht. Für das Einsetzen der Ablösung lassen sich einfache Gesetze formulieren. Sie interessieren im Hinblick auf den laminar-turbulenten Umschlag. Das angegebene Ablösungskriterium beansprucht als Folgerung aus einer Störungstheorie der 1. Ordnung nur größenordnungsmäßige Richtigkeit. Es wird durch die Quick-Schröderschen Beispiele befriedigend bestätigt.

Eine erste Ausdehnung der Untersuchung auf eine Theorie der 2. Ordnung im Störungsparameter ϵ (Amplitude der relativen äußeren Geschwindigkeitsschwankung) zeigt, daß der Reibungswiderstand der welligen Platte kleiner wird als derjenige der ebenen Platte, in Übereinstimmung mit den Feststellungen an numerischen Beispielen von Quick und Schröder. Es tritt jedoch ein Druckwiderstand hinzu, der diese Widerstandsverminderung im Rahmen der Theorie 2. Ordnung gerade wieder kompensiert. Eine Änderung des Gesamtwiderstandes durch Welligkeit der Oberfläche kann frühestens in der 3. Ordnung in ϵ entstehen.

Schrifttum.

- [1] H. Blasius: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. Math. Phys. Bd. 56 (1908), S. 1—37.
- [2] L. Prandtl: The mechanics of viscous fluids. In W. F. Durand, Aerodynamic Theory, Bd. III, Abschn. G. Berlin 1935.
- [3] L. Prandtl: Zur Berechnung der Grenzschichten. Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938), S. 77—82.
- [4] L. Howarth: On the solution of the laminar boundary layer equations. Proc. Roy. Soc. London A, Bd. 164 (1938), S. 547—579.
- [5] J. Pretsch: Die Stabilität einer ebenen Laminarströmung bei Druckgefälle und Druckanstieg. Jb. dtsh. Luftfahrtforsch. Bd. I (1941), S. 58—75.
- [6] K. Schröder: Ein einfaches numerisches Verfahren zur Berechnung der laminaren Grenzschicht. Noch nicht veröffentlicht.
- [7] K. Schröder: Berechnung der laminaren Grenzschicht an einem elliptischen Zylinder bei Zugrundelegung einer gemessenen Druckverteilung. Noch nicht veröffentlicht.
- [8] H. Görtler: Ein Differenzenverfahren zur Berechnung laminarer Grenzschichten. Erscheint demnächst im Ing.-Archiv.
- [9] A. W. Quick und K. Schröder: Verhalten der laminaren Grenzschicht bei periodisch schwankendem Druckverlauf. Noch nicht veröffentlicht.

Abgeschlossen im Oktober 1944.

Die Stabilitätsfrage bei rückgekoppelten Verstärkern. I.¹⁾

Von N. Joachim Lehmann in Dresden.

Im vorliegenden ersten Teil der Arbeit werden die Grundlagen zur rechnerischen und zeichnerischen (experimentellen) Stabilitätsuntersuchung linearer, rückgekoppelter Verstärker von einem einheitlichen mathematisch-physikalischen Standpunkt betrachtet und in eine für die Anwendung geeignete Form gebracht; der später folgende zweite Teil bringt dazu Beispiele (Vierpoltheorie) und Ergänzungen.

In the present first part of the report, the foundations of the numerical and graphic (experimental) methods of investigating the stability of the linear amplifier the output of which is connected to the input are considered from a unitary mathematical-physical point of view, and transformed in such a way that they may be easily applied. A second part will follow containing examples (theory of quadrupoles) and supplements.

Dans la première partie du présent essai on établit les bases de l'étude numérique et graphique (experimentale) de la stabilité des amplificateurs linéaires à réaction, considérés du point de vue mathématique et physique, en mettant la théorie sous une forme appropriée aux applications pratiques. La deuxième partie de l'essai, qui doit paraître plus tard, en donnera quelques exemples (théorie des quadripôles), ainsi que les compléments.

В первой части данной работы рассматриваются с физико-математической точки зрения теоретические основания численного и графического (экспериментального) исследования устойчивости линейных усилителей с обратной связью, причем эти теоретические основания приводятся в удобную для применения форму. Во второй части работы будут даны примеры и дополнения.

Einleitung.

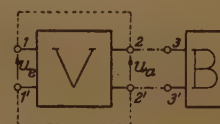
Die Frage, ob ein Verstärkergerät stabil weiterarbeiten kann, wenn es rückgekoppelt wird, ist von verschiedenen Seiten theoretisch behandelt worden. Die besonders für die elektrische Nachrichtentechnik grundlegenden Arbeiten stammen von Strecker²⁾ und Nyquist³⁾; wobei allerdings gegen die Nyquistsche Auffassung des Selbsterregungsvorganges schwerwiegende Einwände vorgebracht wurden⁴⁾. Strecker behandelt die Aufgabe sehr allgemein, trotzdem fehlt aber eine einfache anschauliche Erklärung verschiedener scheinbarer Paradoxa, wie er gelegentlich selbst betont⁴⁾; außerdem wird infolge der vorwiegend anschaulichen Betrachtungsweise übersehen, daß die benutzten Vierpolkenngrößen nur unter Nebenbedingungen zur Stabilitätsuntersuchung ausreichen⁵⁾. In der folgenden Arbeit soll die gesamte Theorie der Selbsterregung nochmals in einfachster Fassung dargestellt werden⁶⁾; durch Beschränkung der Untersuchungen auf eine einzelne physikalische Kenngröße des Verstärkers wird das Verständnis der Vorgänge erleichtert und eine gewisse Vollständigkeit bei der Betrachtung der in der Praxis vorkommenden Möglichkeiten erreicht. Es zeigt sich hierbei sehr deutlich, daß die Rückkopplung keineswegs mehr als Verstärkungs- sondern als Eigenschwingungsproblem betrachtet werden muß, und daß die Nichtbeachtung dieser Tatsache der Grund für alle scheinbaren Paradoxa ist. Bei der Betrachtung des Vierpols⁵⁾ werden mehrere für die Stabilitätsuntersuchung geeigneten Kenngrößen angegeben.

Teil I:

Die eindimensionale Theorie der Rückkopplung.⁷⁾

1. Der Verstärker.

Es wird hier ein linear arbeitender Verstärker (Übertrager) „V“ vorausgesetzt, der am Ausgang durch ein angekoppeltes System „B“ belastet sein kann (kurz: Belastungszustand B des Verstärkers; in Bild 1 ist die zugehörige Schaltung als Meßschaltung bezeichnet). Das System „B“ soll dabei in gleicher Art wie der Verstärker „V“ linear arbeiten.



Verstärker Belastungssystem

Bild 1. Schaltungen beim Verstärker.
Verbindung (2—3; 2'—3') = Meßschaltung.
Verbindung (1—2; 1'—2') = Rückkopplungsschaltung.

¹⁾ Mitteilung des Lehrstuhls f. angew. Mathematik (Prof. Dr. Fr. A. Willers) der T. H. Dresden.

²⁾ Anschauliche Theorie der Selbsterregung von Felix Strecker, Hirzel, Leipzig 1945. Darin ist ein un- veröffentlichter Aufsatz aus dem Jahre 1931 (am 28. 4. 1931 bei der Zeitschr. „Elektr. Nachr. Techn.“ eingegangen) abgedruckt, der den Prioritätsanspruch des Verfassers begründet. (Im folgenden mit Strecker zitiert.) (Das Buch ist noch nicht erschienen.)

³⁾ H. Nyquist, Regeneration Theory, Technical Publication Bell Telephone System 1932.

⁴⁾ Strecker, Abschnitt C 3.

⁵⁾ Man vergleiche hierzu Teil II, Abschnitt 2 u. 3 dieser Arbeit.

⁶⁾ Die vorliegende Arbeit war bereits im wesentlichen fertiggestellt, bevor Einsicht in einige Fahrenkorrekturbogen (bis S. 64) des Streckerschen Buches genommen werden konnte.

⁷⁾ Obwohl die Theorie im folgenden ganz allgemein physikalisch-mathematisch ohne Bezugnahme auf spezielle Anwendungsgebiete entwickelt werden soll, werden viele Bezeichnungen aus der elektrischen Nachrichtentechnik benutzt: z. B. wird eine Zeitfunktion $u(t)$ in Anlehnung an den Röhrenspannungsverstärker mit „Spannung“ bezeichnet.

Der Zusammenhang zwischen der angelegten Eingangsspannung $u_e(t)$, die als Funktion der Zeit t alle später benötigten Differentiierbarkeitseigenschaften haben soll, und der Ausgangsspannung $u_a(u_e) = f(t)$ sei durch zwei lineare Differentialoperatoren

$$N = \sum_{v=0}^n C_v \frac{d^v}{dt^v} \text{ mit } C_n \neq 0 \quad \text{und} \quad M = \sum_{r=0}^m D_r \frac{d^r}{dt^r} \text{ mit } D_m \neq 0 \quad \dots (1)/(2)$$

gegeben:

$$N u_e = M u_a \quad \dots (3).$$

Diese Differentialgleichung gilt für einen bestimmten Belastungszustand B ; die C_v , D_r und damit auch die Bauelemente des Verstärkers sollen zeitlich konstante Größen sein. Durch Gl. (3) ist die Arbeitsweise des Verstärkers nur in bezug auf die Bewegungsgröße $u(t)$ mathematisch gegeben; das wird aber bereits genügen, um die charakteristischen Merkmale der Rückkopplung und das Wesen der scheinbaren Paradoxa zu erkennen. Beispiele und die Anwendung bzw. Erweiterung der Ergebnisse auf „mehrdimensionale Verstärker“ (Vierpole), bei denen gleichzeitig mehrere Zeitfunktionen $u(t)$, $v(t)$, ... betrachtet werden müssen, werden im Teil II durchgeführt. Sofern die Betriebseigenschaften des mit Gl. (3) gegebenen Übertragers durch Messungen festgestellt werden sollen, wird er im allgemeinen „stabil“ arbeiten müssen, d. h. u_a muß nach Abschalten von u_e wieder auf Null zurückgehen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_a(u_e(t) \equiv 0) = 0 \quad \dots (4)$$

Ist aber diese Bedingung erfüllt, so haben die zum Operator M gehörigen charakteristischen Zahlen nur negative Realteile. Die Lösung von (3) lautet für $u_e(t) \equiv 0$ für $t > 0$:

$$u_a(u_e \equiv 0) = \sum_{\varrho=1}^a P_{\varrho}^{(\mu_{\varrho}-1)} e^{z_{m,\varrho} t} \quad \dots (5),$$

dabei sind die charakteristischen Zahlen $z_{m,\varrho} = \delta_{m,\varrho} + i\omega_{m,\varrho}$ ($\varrho = 1, \dots, a \leq m$) die a voneinander verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung:

$$0 = \sum_{v=0}^m D_v z^v = \prod_{\varrho=1}^a D_m (z - z_{m,\varrho})^{\mu_{\varrho}} = \Re(z) \quad \dots (6),$$

μ_{ϱ} gibt ihre Vielfachheit an ($m = \sum_{\varrho=1}^a \mu_{\varrho}$). Physikalisch stellen die $z_{m,\varrho}$ das im allgemeinen komplexe Anklingmaß der Eigenschwingungen an der Ausgangsseite des Verstärkers dar.

Die in Gl. (5) auftretenden Ausdrücke $P_{\varrho}^{(\mu_{\varrho}-1)}$ sind Polynome $(\mu_{\varrho}-1)$ -ten Grades in t :

$$P_{\varrho}^{(\mu_{\varrho}-1)} = \sum_{\sigma=0}^{\mu_{\varrho}-1} p_{\varrho,\sigma} t^{\sigma} \quad \dots (7).$$

Die m Konstanten $p_{\varrho,\sigma}$ werden durch den Anfangszustand von u_a zur Zeit $t=0$ vollständig bestimmt.

Damit die Stabilitätsbedingung Gl. (4) für jeden beliebigen Anfangszustand erfüllt ist, folgt aus Gl. (5) offensichtlich die Behauptung

$$\delta_{m,\varrho} < 0 \quad \varrho = 1, \dots, a \quad \dots (8).$$

Sobald der betrachtete Verstärker „stabil“ arbeitet, kann man leicht seine Übersetzung $\dot{U}(i\omega)$ messen. Diese Kenngröße wird besonders in der Elektrotechnik benutzt und ist als Verhältnis der Ausgangsspannung im eingeschwungenen Zustand (d. h., $u_a = f(t)$ wird nur bei $t \rightarrow \infty$ betrachtet) zu einer sinusförmigen Eingangsspannung mit der Kreisfrequenz ω definiert. D. h., wenn man in komplexer Schreibweise $u_e = E e^{i\omega t}$ setzt:

$$\dot{U}(i\omega) = \frac{u_{a \text{ Part}}(E e^{i\omega t})}{E e^{i\omega t}} \quad \dots (9).$$

Das hier auftretende Partikularintegral $u_{a \text{ Part}}(E e^{i\omega t})$ der Gl. (3) wird unten bei Gl. (11) genauer betrachtet.

Die durch Gl. (9) gegebene Kennfunktion für den Übertrager genügt meist vollständig zur Charakterisierung seiner Verstärkereigenschaften, sogar die Stabilitätsfrage des rückgekoppelten

^{a)} Vgl. z. B. L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen. 3. Aufl., S. 332/336. Berlin: Julius Springer, 1930.

Die Eigenschwingungszahlen $z_{R,e}$ sind die r voneinander verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung des rückgekoppelten Verstärkers

$$\sum_{\nu=0}^{n_R} C_{R,\nu} z^\nu = \sum_{\nu=0}^{m_R} D_{R,\nu} z^\nu \quad \text{oder} \quad \mathfrak{N}_R(z) - \mathfrak{M}_R(z) = 0 \quad \dots \quad (18);$$

β_e ist wieder ihre Vielfachheit. Die in den entsprechend Gl. (7) definierten Polynomen $P_e^{(\beta_e-1)}$ der Gl. (17) auftretenden Konstanten $p_{e,\sigma}$ werden durch den Anfangszustand zur Zeit $t = 0$ festgelegt.

An dieser Stelle erkennt man deutlich, wie das Verhalten des rückgekoppelten Verstärkers lediglich durch seine r verschiedenen Eigenschwingungen unter Berücksichtigung von deren Vielfachheit bestimmt ist: denkt man sich z. B. zur Zeit $t = 0$ am Eingang des rückgekoppelten Verstärkerseinen bestimmten Anfangszustand $u_e(0), u'_e(0), \dots$ vorgegeben, so werden dadurch die Konstanten $p_{e,\sigma}$ im Ansatz Gl. (17) bestimmt. Für $t > 0$ läuft ein Eigenschwingungsvorgang ab, in den ohne Änderung der Schaltung von außen nicht mehr eingegriffen werden kann; es darf — auch nicht im Gedankenexperiment — der Übertrager-Ein- und Ausgang nicht mehr getrennt beobachtet werden. Der Einfluß einer am Eingang zusätzlich aufgezwungenen Bewegung $u_E(t)$ überlagert sich diesem Vorgang einfach linear (s. Fußnote ⁹), ändert aber nichts daran. Die Übersetzung $\dot{U}_R(z)$ — d. h. die Übersetzung eines offenen Verstärkers bei der Belastung R — hat nur noch mittelbare Bedeutung: $\dot{U}_R(z) = 1$ entscheidet über die Stabilitätseigenschaft des rückgekoppelten Gerätes, während $\ddot{u} = \dot{U}_R/1 - \dot{U}_R$ dessen Übersetzung ist (s. Fußnote ⁹). Nichtbeachtung dieses Tatbestandes ist der Grund für alle scheinbaren Paradoxa ¹¹).

3. Die Entscheidung der Stabilitätsfrage.

Die Schwingung $u(t)$ nach Gl. (17) — und damit der rückgekoppelte Verstärker — wird instabil, sobald eine der Wurzeln $z_{R,e}$ der zugehörigen charakteristischen Gl. (18) einen positiven Realteil hat; bei nur negativen Realteilen klingen alle Teilschwingungen ab. Ein stationärer Vorgang ist nur dann möglich, wenn wenigstens eine Zahl $z_{R,e}$ rein imaginär und einfach ist und alle anderen negative Realteile haben. Bei der Untersuchung der Stabilitätsfrage sollen zwei Fälle unterschieden werden:

A. Es ist die Differentialgleichung (16) bekannt.

In diesem Falle muß die ganze rationale Funktion $\mathfrak{N}_R(z) - \mathfrak{M}_R(z)$ nach Gl. (18) aufgestellt und auf Wurzeln mit positivem Realteil geprüft werden. Dazu stehen die inhaltlich gleichwertigen Kriterien von Routh ¹²) und Hurwitz ¹³) und ein anderes von Leonhard ¹⁴) zur Verfügung. Bis Gleichungen 6. Grades hat dabei Bilharz ¹⁵) eine graphische Methode angegeben, die eine einfache Handhabung des ersten Kriteriums ermöglicht. In ihrem Anwendungsgebiet erlaubt die graphische Methode von Bilharz die schnellste Stabilitätsuntersuchung, allgemein stellt wohl das leicht zu schematisierende Routhsche Verfahren ¹⁶) die einfachste Prüfungsmethode dar ¹⁷).

B. Es wurde die ω -Übersetzung $\dot{U}_R(i\omega)$ experimentell aufgenommen.

Hierzu betrachten wir den Zusammenhang zwischen der Hauptgleichung (18) und der Übersetzung $\dot{U}_R(z)$ genauer. Division der Gl. (18) durch $\mathfrak{M}_R(z)$ ergibt:

$$\dot{U}_R(z) - 1 = 0 \quad \dots \quad (19).$$

Diese Gleichung liefert zumindest alle Wurzeln $z_{R,e}$ von Gl. (18), die nicht gleichzeitig Nullstellen von $\mathfrak{M}_R(z)$ sind, in der richtigen Vielfachheit. Und das genügt zur Untersuchung von Stabilitätsaufgaben aus der Praxis wohl immer, besonders, da hier nur Lösungen mit positivem Realteil interessieren und nach Gl. (8) die Wurzeln von $\mathfrak{M}_R(z)$ bei einem „stabilen“ offenen Verstärker immer negative Realteile haben. Da die Wurzeln der ganzen rationalen Funktion $\mathfrak{N}_R(z) - \mathfrak{M}_R(z)$ und damit auch die von Gl. (19) in der z -Ebene alle innerhalb eines Kreises um den Nullpunkt mit einem endlichen Radius S liegen ¹⁸), so ist die Suche nach Wurzeln mit positivem Realteil gleich-

¹¹) Man vgl. hierzu auch das Beispiel in II, 1.

¹²) E. J. Routh, A treatise on the stability of a given state of Motion. London 1877.

¹³) A. Hurwitz, Math. Ann. Bd. 46 (1895), S. 307–311. Das Hurwitzsche Kriterium wurde von H. Bilharz, Z. angew. Math. Mech. Bd. 24 (1944), S. 77–82, für Gleichungen mit komplexen Koeffizienten erweitert.

¹⁴) A. Leonhard, Arch. Elektrotechn. Bd. 38 (1944), S. 17–28.

¹⁵) H. Bilharz, Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941), S. 96–102.

¹⁶) Fr. A. Willers, Prakt. Analysis. 2. Aufl., § 30. Berlin: de Gruyter. Rechenformulare hierzu liegen z. B. im Math. Seminar der T. H. Dresden.

¹⁷) Ein Beispiel hierzu wird in II, 4 durchgerechnet.

¹⁸) Man vgl. hierzu und im folgenden z. B. K. Knopp, Funktionentheorie. Sammlung Götschen, Bd. 668. 6. Aufl. 139 S. Berlin: de Gruyter 1944.

bedeutend mit der Frage, ob in der z -Ebene Lösungen $z_{R, e}$ innerhalb eines Gebietes liegen, welches durch eine Kurve J entsprechend Bild 2 begrenzt wird. (Der Weg J setzt sich allgemein aus dem Stück von $-S$ bis $+S$ der imaginären Achse und einem Halbkreis um den Nullpunkt in der $\delta > 0$ -Halbebene mit dem Radius S zusammen. Sollten dabei zufällig auf der imaginären Achse Wurzeln $z_{R, \xi} = i\omega_{R, \xi}$ oder Pole $z_{mR, e}$ liegen, so sollen diese durch einen Haken aus dem von J umrandeten Gebiete ausgeschlossen werden¹⁹⁾).

Bei der in der Praxis vorliegenden Aufgabe ist $\ddot{U}_R(z)$ nur auf einem Teil der imaginären Achse der z -Ebene bekannt ($\ddot{U}_R(i\omega)$); vorläufig sehen wir aber einmal die vollständige durch $\ddot{U}_R(z)$ vermittelte Abbildung der J -Kurve in eine $\ddot{U}=X+iY$ -Ebene als gegeben an. Da $\ddot{U}_R(z)$ auf J überall regulär analytisch ist, wird J in der \ddot{U} -Ebene wieder als geschlossener Kurvenzug J' mit einem bestimmten Richtungssinn abgebildet. Die Funktionstheorie liefert nun eine einfache Vorschrift zur Prüfung, ob der Kurve J' im Innern der J -Kurve Wurzeln $z_{R, e}$ entsprechen oder nicht²⁰⁾. Es handelt sich dabei um eine bekannte Anwendung des Residuensatzes: Es sei $f(z)$ in G ein-

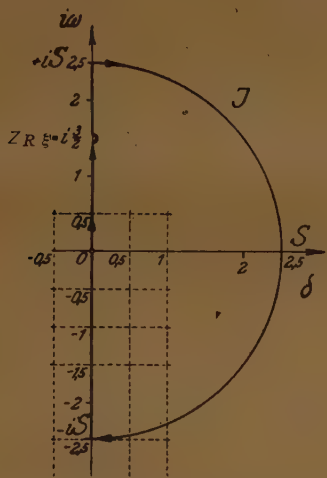


Bild 2. Die z -Ebene mit der J -Kurve.

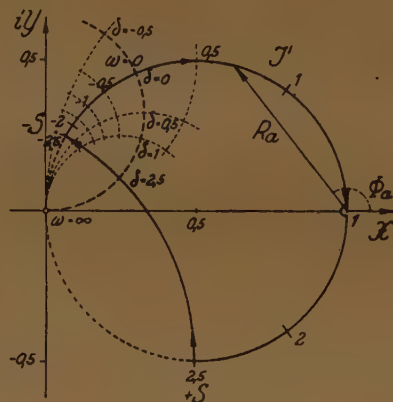


Bild 3. Die \ddot{U} -Ebene mit der Abbildung der J -Kurve und einem Teil der δ -Kont. bzw. ω -Kont.-Linien. (Es ist $\ddot{U}(z) = (1 - i1,5 + z)^{-1}$ gewählt.)

deutig (evtl. auf einer mehrblättrigen Riemannschen Fläche) und regulär, C ist ein in G liegender geschlossener doppelpunktfreier Weg mit dem J entsprechenden Richtungssinn. Ist dann $f(z)$ auf C von Null verschieden und liegen im Innengebiet von C höchstens endlich viele singuläre Stellen, die sämtliche Pole sind, so ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = P - N \quad (20),$$

wobei N die Zahl der Nullstellen, P die Zahl der Pole von $f(z)$ innerhalb C angibt; jede Stelle wird dabei ihrer Vielfachheit entsprechend gezählt. Setzt man nun $f(z) = R(x, y) e^{i\Phi(x, y)}$ und damit $f'(z) dz = e^{i\Phi} dR + iR e^{i\Phi} d\Phi$, wobei $R(x, y)$ in einer f -Ebene der Betrag, $\Phi(x, y)$ das Argument von $f(z)$ ist, so wird aus Gl. (20)

$$P - N = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C')} \frac{dR}{R} + \frac{1}{2\pi} \int_{(C')} d\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{(C')} d\Phi \quad (21).$$

Das erste Integral fällt hierin weg, da nach Voraussetzung immer $R(x, y)$ reell und > 0 bleibt und über einen geschlossenen Weg integriert wird. Der Satz Gl. (21) wird jetzt auf die Funktion $f(z) = \ddot{U}_R(z) - 1$ und den Integrationsweg J bzw. sein Bild J' in der \ddot{U} -Ebene angewendet. Da $f(z)$ hierbei eine gebrochene rationale Funktion ist und J Nullstellen und Pole von $f(z)$ vermeidet, sind alle Voraussetzungen erfüllt, und man erhält:

$$P - N = \frac{1}{2\pi} \int_{(J')} d\Phi \quad (22).$$

In der \ddot{U} -Ebene ist hierbei Φ wegen $f(z) = R e^{i\Phi} = \ddot{U}_R(z) - 1$ der Winkel eines Vektors im Punkte Eins. (Bild 3.)

¹⁹⁾ Im Hinblick auf die praktische Anwendung wurde der hiermit für J gegebene Durchlaufungssinn als positiv angesehen.

²⁰⁾ K. Knopp, a. a. O., S. 127–131.

Beim stabilen eindimensionalen Verstärker weiß man, daß J wegen Gl. (8) keine Pole umschließt und bekommt dann das zuerst von Nyquist veröffentlichte Stabilitätskriterium: (Beim stabilen rückgekoppelten Verstärker muß $N = 0$ sein!)

Man zeichne in der \dot{U} -Ebene vom Punkt $\dot{U} = 1$ aus einen Vektor $R_a e^{i\Phi_a}$ zu einem beliebigen Punkte der J' -Ortskurve. Läßt man dann den Endpunkt des Vektors einmal ganz auf der J' -Ortskurve herumwandern, so ändert sich der Betrag des Winkels Φ gegenüber dem Anfangswinkel Φ_a dann und nur dann um Vielfache von 2π , wenn das System instabil ist.

Der Fall, daß nicht $P = 0$ vorausgesetzt werden kann, kommt bei „mehrdimensionalen Verstärkern“ vor und wird daher beim Beispiel des Dreipols, in II, 3, zusammen mit der Möglichkeit, daß Pole auf der imaginären Achse liegen, etwas genauer betrachtet ²¹⁾.

Der praktischen Anwendung des mit Gl. (22) bewiesenen Umlaufkriteriums stehen auch im Falle, daß $P = 0$ und das Fehlen von Polen auf der imaginären Achse vorausgesetzt werden kann, noch viele Schwierigkeiten entgegen, denn es wird ja nur $\dot{U}_R(i\omega)$ in einem begrenzten ω -Intervall gemessen. In der \dot{U} -Ebene ist also nur ein Teil der Abbildung der imaginären Achse der z -Ebene bekannt; die J' -Kurve ist nicht vollständig gegeben. Um hier weiterzukommen, beachten wir das asymptotische Verhalten und die Konformität der durch $\dot{U}_R(z)$ gelieferten Abbildung; dabei wird auf der $\dot{U}_R(i\omega)$ -Kurve immer die ω -Skala als bekannt angenommen. Zudem soll gleich berücksichtigt werden, daß bei den allermeisten in der Praxis auftretenden Aufgaben die in $\dot{U}_R(z)$ auftretenden Konstanten reell sind; in der Elektrotechnik handelt es sich dabei um Größen wie Widerstände, Kapazitäten usw. In diesem Fall vereinfacht sich die Untersuchung beträchtlich, obwohl auch der allgemeinere Fall ganz entsprechend behandelt werden kann. Bei reellen Konstanten ist die Übersetzung eine reelle Funktion der komplexen Variablen z , sie liefert also zu konjugiert komplexen Punkten z, \bar{z} konjugiert komplexe Werte $\dot{U}, \bar{\dot{U}}$. Man könnte sich daher bei der Stabilitätsuntersuchung darauf beschränken festzustellen, ob im ersten Quadranten der z -Ebene Lösungen der Hauptgleichung liegen. Es ist jedoch genau so einfach, die theoretischen Überlegungen mit der J -Kurve durchzuführen und erst später zu berücksichtigen, daß man auch mit deren im ersten Quadranten liegenden Teil auskommt; man kann den Weg J zerlegen: $J = J_1 - \bar{J}_1$, wobei J_1 das Geradenstück von $0 \rightarrow iS$ und den Viertelkreis von $iS \rightarrow S$ vertritt. \bar{J}_1 ist der an der δ -Achse gespiegelte, also zu J_1 konjugiert komplexe Weg; das negative Zeichen davor zeigt an, daß \bar{J}_1 mit negativem Richtungssinn durchlaufen werden muß, da J_1 bei der Spiegelung von J_1 den Richtungssinn von $0 \rightarrow -iS$ usw. zugeordnet bekommt. Da $\dot{U}_R(z)$ hier eine reelle Abbildungsfunktion der komplexen Variablen z ist, wird auch $J' = J'_1 - \bar{J}'_1$ und damit wegen der allgemein-

$$\begin{aligned} \text{gültigen Beziehung } \int_{(A)} d\Phi &= - \int_{(\bar{A})} d\Phi: \\ \int_{(J')} d\Phi &= \int_{(J_1 - \bar{J}_1)} d\Phi = \int_{(J'_1)} d\Phi - \int_{(\bar{J}'_1)} d\Phi = 2 \int_{(J'_1)} d\Phi \dots \dots \dots (23). \end{aligned}$$

Diese Gleichung ermöglicht die endgültige Formulierung der Stabilitätskriterien ohne Bezugnahme auf $\dot{U}_R(i\omega)$ bei negativen Frequenzen ω . Wenn die ω -Übersetzung als gegeben angesehen wird, fehlt an der J' -Kurve noch das Bild des Halbkreises von J , dessen Radius S auch unbekannt ist. Es wird der Versuch unternommen, diese Lücke zu schließen. Dabei unterscheidet man zweckmäßig zwei Fälle:

a) m , der Grad von $\mathfrak{M}_R(z)$, ist größer oder gleich n , dem Grad von $\mathfrak{N}_R(z)$.

In diesem Falle verhält sich $\dot{U}_R(z)$ im Unendlichkeitspunkt regulär, es ist $\lim_{z \rightarrow \infty} \dot{U}_R(z) = \dot{U}_\infty$, wobei für $m > n$ $\dot{U}_\infty = 0$, sonst ein im Endlichen liegender Punkt ist. Das Bild des Halbkreises der J -Kurve schrumpft dabei mit wachsendem Radius S in den Punkt \dot{U}_∞ hinein, so daß die J -Kurve in der \dot{U} -Ebene mit $S \rightarrow \infty$ bei Kenntnis von $\dot{U}_R(i\omega)$ geschlossen werden kann. Bezeichnet man das in der \dot{U} -Ebene über den Weg $\dot{U}_R(i\omega)$ von $\omega = 0 \rightarrow \infty$ geführte Integral $\int d\Phi$ mit $\int_{(0)} d\Phi$, so wird bei reeller Abbildungsfunktion $\dot{U}_R(z)$ mit $S \rightarrow \infty$ (im Weg J) aus Gl. (22) und (23):

$$P - N = \frac{1}{\pi} \int_{(0)} d\Phi \dots \dots \dots (24),$$

woraus z. B. im Falle des „stabilen eindimensionalen“ Verstärkers wegen $P = 0$ sofort die Stabilitätseigenschaft des Systems entnommen werden kann. Ob der Fall $m \geq n$ vorliegt, erkennt

²¹⁾ Obwohl ein offener eindimensionaler Übertrager mit Polen auf der imaginären Achse in der Praxis meßtechnisch kaum stabil arbeitet, vgl. man hierzu z. B. das Beispiel nach Bild 10 u. 11 im Artikel von A. Leonhard, a. a. O.

man meist schon bei oberflächlicher Betrachtung der $\check{U}_R(i\omega)$ -Kurve; sie muß sich mit wachsendem ω bei schnell enger werdender ω -Skala dem Punkt \check{U}_∞ nähern, der bei $m > n$ im Nullpunkt, bei $m = n$ und reeller Funktion $\check{U}_R(z)$ irgendwo auf der reellen Achse liegt. Restlose Klarheit bringt dann die analytische Fortsetzung der $\check{U}_R(i\omega)$ -Kurve (Extrapolation auf $\omega \rightarrow \infty$)²²⁾ ²³⁾. Meist genügt ein roher graphischer Überblick.

b) Es ist m kleiner als n .

$\check{U}_R(z)$ hat damit im Unendlichkeitpunkt der z -Ebene einen Pol $(n-m)$ -ter Ordnung, der durch den Halbkreis der J -Kurve aus dem Integrationsgebiet ausgeschlossen werden muß.

Hier zerlegt man $\check{U}_R(z)$ in eine ganze rationale Funktion $\mathfrak{A}^{n-m}(z)$ vom Grade $(n-m) \geq 1$ und eine echt gebrochene Funktion $\mathfrak{B}(z)$:

$$\check{U}_R(z) = \mathfrak{A}^{n-m}(z) + \mathfrak{B}(z), \quad \text{d. h.,} \quad \check{U}_R(z) \sim \mathfrak{A}^{n-m}(z) \dots \dots \dots (25),$$

wo \sim asymptotische Gleichheit für $|z| \rightarrow \infty$ angibt. Für genügend große $|z|$ gilt also eine Näherung in der Form:

$$\check{U}_R(z) \approx K_1 z^{n-m} \dots \dots \dots (26).$$

Für das Bild des Halbkreises der J -Kurve für sehr großen Radius S folgt mit $z = S e^{i\varphi}$, wobei φ die Werte von $\frac{\pi}{2}$ bis $-\frac{\pi}{2}$ durchläuft;

$$\check{U}_R(S e^{i\varphi}) \approx K_1 S^{n-m} e^{i(n-m)\varphi} = A e^{i\gamma} \dots \dots \dots (27),$$

und Ψ die Werte $\frac{(n-m)}{2} \pi$ bis $-\frac{(n-m)}{2} \pi$ annimmt. Da A sehr groß ist, wird auch $\Psi \rightarrow \Phi$, und man bekommt für $S \rightarrow \infty$ schließlich mit Gl. (23) und Bezeichnungen nach (Gl. 24) aus Gl. (22):

$$P - N = \frac{1}{2\pi} \int_{(J')} d\Phi = \frac{1}{2\pi} \left[2 \int_{(0)}^{-(n-m)\frac{\pi}{2}} d\Phi + \int_{(n-m)\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\Psi \right] = \frac{1}{\pi} \int_{(0)}^{-(n-m)\frac{\pi}{2}} d\Phi - \frac{(n-m)}{2} \dots \dots (28)$$

Um diese Beziehung zur Stabilitätsuntersuchung verwenden zu können, braucht man nur noch die Größe $(n-m)$, die sich aber meist leicht aus dem Verlauf von $\check{U}_R(i\omega)$ im Bereiche großer ω entnehmen läßt. Aus Gl. (25) wird mit $z = i\omega$:

$$\check{U}_R(i\omega) \sim K_1 i^{(n-m)} \omega^{(n-m)} + K_2 i^{(n-m-1)} \omega^{(n-m-1)} + \dots = A e^{i\gamma},$$

d. h. $|\gamma| \sim 0$ oder π bei geradem, $\sim \frac{\pi}{2}$ bei ungeradem $(n-m)$. Das ergibt die Regel:

Es ist $(n-m) \begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}$, wenn die ω -Übersetzung mit wachsendem ω der $\begin{cases} \text{reellen} \\ \text{imaginären} \end{cases}$ Achse zustrebt. Die genaue Größe von $(n-m)$ ist dann einfach aus der ω -Skala (die genähert $\omega^{(n-m)}$ darstellt) abzuschätzen, zumal $(n-m)$ in der Praxis meist klein ist. Auch hier kann gelegentlich die analytische Fortsetzung mit Vorteil benutzt werden.

Wurde bisher immer das Umlaufkriterium Gl. (22) zu Grunde gelegt, das zu einfachen Stabilitätskriterien führt (Gl. (24) und (28)), so treten doch Schwierigkeiten auf, wenn die Zahl der Pole innerhalb J unbekannt ist. (Man vgl. II, 2). Es bleibt dann auf jeden Fall die analytische Fortsetzung der $\check{U}_R(i\omega)$ -Kurve in die z -Ebene hinein zur Untersuchung geeignet. Man entwirft dabei in der \check{U} -Ebene (unter Berücksichtigung der Konformität der Abbildung) von Kurventeilen von $\check{U}_R(i\omega)$ ausgehend, denen der kritische Punkt $\check{U} = 1$ rechts benachbart ist, das Bild eines Maschensystems von $\delta = \text{konst.}$, $\omega = \text{konst.}$ -Linien der z -Ebene (vgl. Bild 2 u. 3). Damit wird nicht nur festgestellt, ob dem Punkt $\check{U} = 1$ in der z -Ebene Werte $z_{R, e}$ mit positivem Realteil entsprechen, sondern $z_{R, e}$ kann zahlenmäßig angegeben werden²⁵⁾.

²²⁾ Fr. A. Willers, Graphische Integration. Sammlung Göschel, Bd. 801. S. 104—131. Berlin und Leipzig: de Gruyter 1920. Weitere Literatur in Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften Bd. II, Tl. III, 1. Hälfte im Artikel von C. Runge u. Fr. A. Willers über numerische und graphische Quadratur und Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen.

²³⁾ Man vgl. hierzu z. B. Bild 3.

²⁴⁾ Das Leonhardsche Stabilitätskriterium stellt eine Spezialisierung dieser allgemeinen Überlegungen auf ganze rationale Funktionen dar.

²⁵⁾ Vgl. Fußnote 22 auf S. 6.

KLEINE MITTEILUNGEN

Über die Machsche V-Ausbreitung.

Die V-Ausbreitung wurde von E. Mach¹⁾ bei der Durchdringung zweier Kugelnknallwellen beobachtet, die gleichzeitig an zwei verschiedenen Orten A , B (Bild 1) erzeugt sind. Zunächst ist die Durchdringung

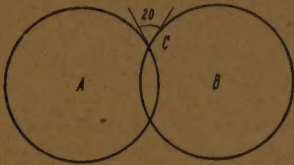


Bild 1. Durchdringung zweier Kugelnwellen.

so, wie es von Schallwellen her geläufig ist, wird aber ein gewisser Winkel 2φ überschritten, so ändert sich das Bild, es entsteht nach den kinematographischen Aufnahmen von C. Cranz und H. Schardin²⁾ im Punkt C eine neue Welle (Bild 2), die sich in den von

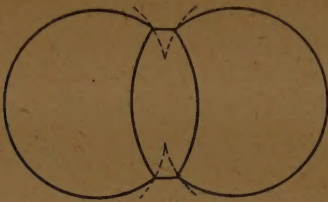


Bild 2. Machsche „V“-Ausbreitung.

den Knallwellen noch nicht erfaßten Kielraum ausbreitet. Der Name dieser Erscheinung kommt von den Versuchen E. Machs mit berußten Glasplatten, auf denen zwei Knallquecksilberhäufchen zur Entzündung gebracht wurden. Im Gebiet der neu entstehenden Welle ist der Ruß weggewischt, wodurch ein V-förmiges entrußtes Gebiet entsteht.

Von C. Cranz und H. Schardin²⁾ wurde das Kriterium aufgestellt, die neue Welle entsteht, wenn der Druck im Überlagerungsbereich der Wellen sich schneller ausbreitet als mit der Geschwindigkeit des Schnittpunktes C (Bild 1). Hier soll dieses Kriterium gasdynamisch untersucht und für das Entstehen der V-Ausbreitung eine Erklärung gegeben werden.

Wir betrachten zunächst die schiefe Reflexion eines Verdichtungsstoßes an einer ebenen Wand und machen den Vorgang zu einem stationären durch Überlagern der negativen Geschwindigkeit des Reflexionspunktes. Wir haben jetzt zwei schiefe Verdichtungsstöße. Über sie liefert das Stoßpolendiagramm im Geschwindigkeitsplan alles Wissenswerte, da in unserem Problem die Randbedingungen Aussagen über Geschwindigkeiten sind.

Die Konstruktion des Geschwindigkeitsplans ist in Bild 3 durchgeführt. Es ist dabei von der Tatsache

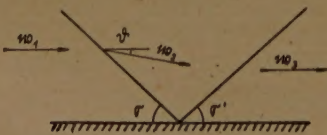


Bild 3. Schiefe Reflexion, stationäres Problem.

Gebrauch gemacht, daß die kritische Schallgeschwindigkeit a in allen Feldern, die von der Wand und den Verdichtungsstößen begrenzt werden, die gleiche ist.

¹⁾ E. Mach und I. Wosyka: Wien. Ber. 72, 1875; W. Rusciky ebenda 73, 1876; E. Mach und I. Sommer ebenda 75, 1877; E. Mach, O. Tumirz und C. Köglerebenda 77, 1878; E. Mach ebenda 77, 1878.

²⁾ C. Cranz und H. Schardin: Z. f. Phys. 56 (1929) S. 147.

Der Betrag der Anströmgeschwindigkeit ergibt sich aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit D der einfallenden Welle und dem Einfallswinkel σ zu

$$w_1 = \frac{D}{\sin \sigma}.$$

Aus w_1 ergibt sich, wie in Bild 3 gezeigt, die Geschwindigkeit w_2 hinter der einfallenden Welle. Zugleich ist w_2 die Anströmgeschwindigkeit der reflektierten Welle, wodurch auch deren Stoßpolare bekannt ist. Aus der Randbedingung, daß in beiden Wellen die Ablenkungswinkel gleiche Größe θ haben, ergeben sich w_3 und der Winkel σ' . Weiterhin zeigt Bild 4 einen Fall,

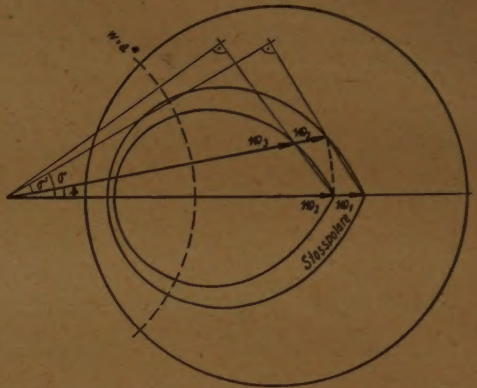
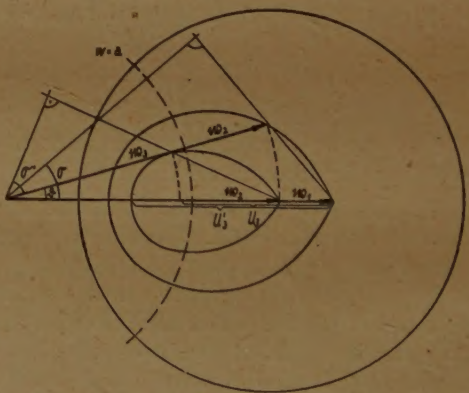


Bild 4. Geschwindigkeitsplan zur schiefen Reflexion.

in dem w_3 die Stoßpolare tangiert. Das bringt die bekannte Tatsache in Erinnerung, daß die Geschwindigkeit in einem schiefen Verdichtungsstoß nicht über einen bestimmten Winkel θ_{\max} hinaus abgelenkt werden kann. Wäre also der Einfallswinkel größer als der zu θ_{\max} gehörige, so könnte die Geschwindigkeit in der reflektierten Welle nicht der Wand parallel abgelenkt werden. Infolgedessen besteht ein maximaler Einfallswinkel σ_{\max} . Er ist abhängig von der Intensität der einfallenden Welle.

Bild 5. Schiefe Reflexion bei maximalem Einfallswinkel.
 $\sigma = 40^\circ$, $\sigma' = 50^\circ$, $\varphi = 16^\circ$.

Dieser stationäre Vorgang kann noch keine Erklärung für den nichtstationären Vorgang der V-Ausbreitung geben. Nimmt man aber die Wand nicht eben sondern gewölbt an, so hat man, wie im beobachteten Fall, einen sich stetig vergrößernden Einfallswinkel. Da nur die Entstehung der V-Ausbreitung interessiert, genügt es, eine Wand mit einem kleinen Knick (Bild 6) anzunehmen. Der Verdichtungsstoß falle zunächst mit maximalem Winkel ein. Läuft dann der Reflexionspunkt über den Knick, so vergrößert sich der Einfallswinkel.

winkel über das zulässige Maß, und es muß V -Ausbreitung entstehen.

Zu ihrer Erklärung formulieren wir die Randbedingung der schiefen Reflexion anders, nämlich so, wie es bei der Anwendung des Huygensschen Prinzips in der Akustik üblich ist. Die einfallende Welle bringt eine Geschwindigkeit U mit, die mit der Randbedingung nicht verträglich ist. Es muß also längs der Wand eine Druckstörung einherlaufen, die die Normalkomponente von U zum Verschwinden bringt. Die Geschwindigkeit $w_1 = D/\sin \sigma_{\max}$, mit der sie sich bewegt, ist größer als die Schallgeschwindigkeit hinter dem Verdichtungsstoß. Man wird so auf das bekannte Problem einer mit Überschallgeschwindigkeit bewegten Druckstörung geführt. Bei nicht zu großem Einfallswinkel hat man den normalen Fall, alle von der Druckstörung ausgesandten Wellen bilden eine ebene Front, die den reflektierten Verdichtungsstoß darstellt, ähnlich wie in der Akustik. Bei genügend großem Einfallswinkel σ — und dieser besteht, sobald der Verdichtungsstoß den Knick der Wand überschreitet — ändern sich die Verhältnisse, es bildet sich vor der Druckstörung ein senkrechter Verdichtungsstoß aus, wie es von der Überschallströmung gegen einen Keil genügend großen Öffnungswinkels (Bild 6) bekannt ist. Damit ist

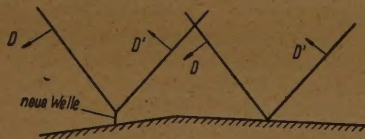


Bild 6. Entstehen der neuen Welle an der Kante einer Wand.

die Entstehung des neuen Verdichtungsstoßes bei der Machschen V -Ausbreitung erklärt. Der neue Verdichtungsstoß bildet mit dem einfallenden und dem durch Reflexion entstandenen eine Gabel, denn das Gas, das dem durch Reflexion entstandenen Verdichtungsstoß nachströmt, hat gegenüber der Druckstörung Unterschallgeschwindigkeit, wie die Rechnung zeigt; hier kann sich also eine von der Druckstörung herührende Wellenfront nicht ausbilden.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der neuentstandenen Stoßwelle ist i. A. nicht gleich der Geschwindigkeit des Gabelpunktes. Bei schwachen Stoßwellen ist sie kleiner, bei starken Stößen größer. Daß trotzdem die Gabel erhalten bleibt, steht dieser Feststellung, die sich auf stationäre Verhältnisse bezieht, nicht entgegen, denn die Gabel kann sich ändern. Bei schwachen Stoßwellen ist der gerade Stoß, der sich mit der Geschwindigkeit des Gabelpunktes bewegt, zu stark, er sendet also Druckwellen aus, die die von früher her noch bestehende reflektierte Welle verstärken und die Gabelform ändern (Bild 7), bei starken Stoßwellen sendet der gerade Stoß, der nun hinter sich einen zu kleinen Druck erzeugt, wenn er sich mit der Geschwindigkeit des Gabelpunktes bewegt, Verdünnungswellen aus, die ebenfalls die Gabel ändern. Bei kleinen Druckdifferenzen sind dies akustische Wellen. Der Unterschied zwischen den beiden Fällen in Bild 7 kommt daher, daß im ersten Fall hinter dem geraden Stoß Unterschall- im zweiten

Überschallströmung besteht. Wie die Nachrechnung zeigt, entspricht der Grenzfall der kritischen Strömungsgeschwindigkeit gerade dem Fall, in dem die

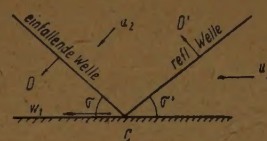


Bild 7. Schiefe Reflexion. Nichtstationäres Problem.

Geschwindigkeit der geraden Stoßwelle und die des Gabelpunktes übereinstimmen. Man sieht, daß das Kriterium von Cranz und Schardin durch das des maximalen Einfallswinkels zu ersetzen ist.

Schließlich werde noch die Gasgeschwindigkeit U_3 hinter dem durch Reflexion entstandenen Verdichtungsstoß und U^3 hinter dem neuentstandenen abge-



Bild 8. Druckwelle vor einer mit Überschall-Geschwindigkeit bewegten Druckstörung.

lesen für den Fall, daß die Geschwindigkeit des geraden Stoßes mit der des Gabelpunktes übereinstimmt. Nach Bild 4 ergibt sich $U_3' > U_3$. Das Machsche V erklärt sich jetzt so, daß hinter der neu entstandenen Stoßwelle der Ruß wegen der größeren Geschwindigkeit weggeschwemmt wird.

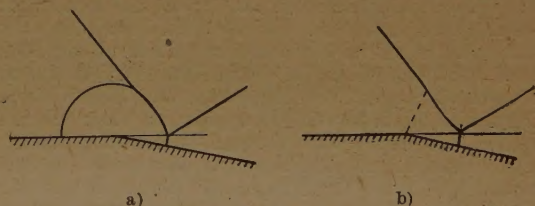


Bild 9.

- a) Schwache Stoßwellen, Überlagerung einer Druckwelle.
b) Starke Stoßwellen, Überlagerung einer Verdünnungswelle.

Der rotationssymmetrische Fall, in dem die einfallenden und reflektierten Verdichtungsstöße Kegelflächen darstellen, unterscheidet sich, was die Entstehung der V -Ausbreitung und die Stärke des neu entstandenen Stoßes betrifft, in nichts von dem ebenen Fall, denn in den Grundgleichungen des Verdichtungsstoßes tritt die Krümmung der Stoßfront nicht auf.

Aachen.

F. Schultz-Grunow.

BUCHBESPRECHUNGEN

Prof. Dr. G. DOETSCH, Tabellen zur Laplace-Transformation und Anleitung zum Gebrauch. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaft in Einzeldarstellungen. Bd. LIV.) VIII + 185 S. mit 9 Abb. Berlin und Göttingen 1947. Springer-Verlag. Preis geh. 18 M.

Der Verfasser, dessen grundlegendes Buch über die Laplace-Transformationen vor 10 Jahren erschienen ist, gibt mit dem vorliegenden Bande dem Praktiker ein wertvolles Hilfsmittel für die Anwendung dieser Transformationen in die Hand. Diese und ähnliche

Methoden haben sich in den letzten Jahrzehnten als Hilfsmittel zur Behandlung gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen insbesondere bei den Elektrotechnikern immer mehr eingebürgert, nicht zum wenigsten, weil sie Probleme, die auf partielle Differentialgleichungen führen, übersichtlich und nach einheitlicher Methode zu behandeln gestatten, während sie nach anderen Methoden oft nur sehr umständlich zu lösen sind. Um die Laplace-Transformation aber schnell und sicher anwenden zu können, braucht man ein möglichst umfangreiches Verzeichnis von Funktio-

nen (Oberfunktionen) mit den dazu gehörenden Laplace-Transformierten (Unterfunktionen). Dieses bringt das vorliegende Buch, das die klassische eindimensionale Transformation behandelt, in einem Umfang, wie er bisher in Deutschland noch nicht gegeben wurde. Im zweiten Teil des Buches finden sich fast 800 solche Korrespondenzen, die nach dem Gesichtspunkt der praktischen Brauchbarkeit ausgewählt sind. Die Anordnung ist nicht die bisher übliche nach Oberfunktionen, sondern Verfasser ordnet nach Unterfunktionen. Das ist deswegen vorteilhaft, weil man bei der Lösung von Differentialgleichungen zu einer Transformaten die Ausgangsfunktion zu finden hat. Übrigens ist am Schluß dieses zweiten Teiles ein Register der auftretenden Oberfunktionen gegeben, das die Funktionssymbole, Definition und Namen der Funktionen und Verweise auf die Abschnitte und Nummern, in denen sie als Oberfunktionen vorkommen, enthält.

Um nun aber das Buch auch für solche Benutzer brauchbar zu machen, die sich nicht eingehender mit der Theorie der Laplace-Transformation beschäftigen haben, schickt der Verfasser den Tabellen einen ersten Teil mit einer Anleitung zu ihrem Gebrauch voraus. Diese ist außerordentlich lesbar geschrieben. Sie bringt nach Definition der Transformation und Angabe der benutzten Bezeichnungen in übersichtlicher Zusammenstellung die Haupteigenschaften und die wichtigsten Regeln zum Rechnen mit diesen Transformationen. Jeder Leser kann so unter Benutzung dieser Regeln die Transformation praktisch anwenden, vor allem, wenn er die Beispiele durchgearbeitet hat, an denen ihr Gebrauch zur Lösung gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen erläutert wird. In diesen Beispielen wird auch ein Fall vorgeführt, wo die gedankenlose Verwendung der Umkehrformel zu falschen Resultaten

führen kann. Zum Schluß wird in diesem ersten Teil dann noch auf die Beziehung der Laplace-Transformation zur „funktionentheoretischen Methode“ und zum Heaviside-Kalkül hingewiesen.

Es liegt so ein Buch vor, das dem praktischen Rechner ausgezeichnete Dienste leisten kann, und es ist sehr zu begrüßen, daß der Verlag dieses treffliche Buch trotz Papiermangel in einer verhältnismäßig guten Ausstattung herausgebracht hat.

Dresden.

Willers.

Prof. Dr. J. Peters, Sechsstellige Tafel der trigonometrischen Funktionen. 3. Aufl. VII + 293 S. Bonn 1946. Ferd. Dummlers Verlag. Preis kart. 32,40 M.

Nachdem im August des Jahres 1941 der Verfasser verstorben ist, hat der Verlag einen unveränderten Abdruck der vor sieben Jahren erschienenen zweiten Auflage, die in Bd. 20 (1940) S. 182/183 dieser Zeitschrift besprochen wurde, herausgegeben. Die Tafeln enthalten die Werte der sechs trigonometrischen Funktionen von zehn zu zehn Bogensekunden des in 90° geteilten Quadranten und die Werte der Kotangente und Kosekante für jede Bogensekunde von 0° bis $1^\circ 20'$, mit ersten Differenzen und Proportionalitätäfelchen, ferner kurze Hilfstafeln für $w' \cdot \operatorname{ctg} w$ und $w' \cdot \operatorname{cosec} w$ von 0° bis $1^\circ 20'$. Man muß dem Verlag sehr dankbar sein, daß er es möglich gemacht hat, eine neue Auflage dieses für das wissenschaftliche Rechnen unentbehrlichen Tafelwerkes auf verhältnismäßig gutem Papier in der bewährten Anordnung und in einwandfreiem Druck unter den heutigen schwierigen Verhältnissen erscheinen zu lassen.

Dresden.

Willers.

NACHRICHTEN

Max Planck †.

Am 4. 10. 1947 ist Max Planck, der Schöpfer des Wirkungsquantums, in Göttingen an einer Lungenentzündung gestorben. Es gibt kein Land der Erde, dessen Physiker nicht des Mannes gedächten, der durch sein Strahlungsgesetz eine neue Epoche in der Physik eingeleitet hat, und die ihn nicht in der Geschichte der Physik an die Seite von Newton, Maxwell u. a. stellen. Viele Arbeiten aus dem Gebiete der Thermodynamik, die ihn schon in jungen Jahren beschäftigte, und die sich mit den Fragen der Entropie befaßten, sind von ihm verfaßt worden. Die grundlegendste, die das Weltbild der Physik zu verändern vermochte, ist im Jahre 1900 während seiner Lehrtätigkeit an der Berliner Universität, an der er bis zu seiner Emeritierung wirkte, entstanden. Sie ist im Anschluß an Diskussionen über das Wiensche Strahlungsgesetz in einer Sitzung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft vorgetragen worden. Versuche, klassisch das Wiensche Strahlungsgesetz zu erklären, führten zu eklatantem Mißerfolg. Planck hat dann den Gedanken ausgesprochen, daß sich diese Schwierigkeiten durch Annahme diskreter Energiequanten beseitigen lasse. Er konnte so die Existenz des Wirkungsquantums begründen. Diese Plancksche Entdeckung eröffnete eine neue Epoche in der Physik und hat vor allem die Physik der atomaren Vorgänge befruchtet. Es gibt darin kaum einen Zweig, in dem nicht das Wirkungsquantum eine entscheidende Rolle spielt.

Neben seiner Leistung war es vor allem sein vornehmer Charakter, der ihn befähigte, noch in seinen

letzten Jahren die Geltung der Wissenschaft in dem Deutschland der Hitlerzeit zu verteidigen.

München: Der Privatdozent der Universität Tübingen, Dr. Fritz Bopp, wurde zum a. o. Prof. für theoretische Physik und angewandte Mathematik an der Universität München ernannt.

Bonn: Der apl. a. o. Prof. der Universität Heidelberg, Dr. Hilmar Wendt, liest in diesem Winter als Gastprofessor an der geodätisch-kulturtechnischen Abteilung der landwirtschaftlichen Fakultät der Universität Bonn.

Frankfurt a. M.: Am 30. 6. 1947 wurde Herrn Dr. G. Lorentz eine Dozentur für Mathematik an der Universität Frankfurt übertragen.

Am 10. 10. 1947 wurde Fräulein Dr. R. Moufang mit der kommissarischen Wahrnehmung des Extraordinariates für Mathematik an der Universität Frankfurt beauftragt und am 19. 12. 1947 zum apl. Professor ernannt.

Berichtigung:

Die an letzter Stelle unter den Nachrichten des Hefes 5/6 gebrachte Notiz bedarf der Berichtigung. Es muß heißen:

Zürich: Prof. Stephen Timoshenko an der Stanford University Cal. USA. wurde zum Dr. sc. techn. h. c. der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich gewählt.

Verantwortlich für den Inhalt: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden; für den Verlag: H. Kaesser, Berlin. Verlag: Akademie-Verlag GmbH., Berlin N 4, Chausseest. 106, Fernsprecher: 42 50 01 (App. 274), Postscheckkonto: Berlin 35 021. Bestell- und Verlagsnummer dieses Hefes: 1009/28/1. Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich RM 15.— zuzüglich Bestellgeld, Einzelheft RM 6.—. Verantwortlich für den Anzeigenteil: Curt F. W. Schreiber, Berlin. Druck: Julius Beltz, Langensalza. (Th. B.-Nr. 04011/16b) — Nr. 42. — Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 245 der Sowjetischen Militär-Verwaltung in Deutschland.